



Handwritten text, likely a signature or date, written in cursive script.

LE MENS

LEBRE

SECOND

J. B. Duchateau giron ^{1^{er}}
Secrétaire principal du Collège de Mazarin.

6468
ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE.

TOME SECOND.

ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE

TOME SECOND.

ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE

PAR

M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

TOME SECOND.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.



A LYON,

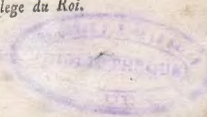
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.

ET A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, Libraire,
rue du Foin-Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.

Avec Approbation & Privilège du Roi.



ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE
PAR
M. LÉONARD EULER.
TRADUIT DE L'ALLEMAND.
AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.
TOME SECOND.
DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.



À PARIS.
Chez Jean-Marie BRUNET, Fils & Fils,
rue de la Harpe, au Palais National, ci-devant.
M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.



ÉLÉMENTS
D'ALGÈBRE.

SECONDE PARTIE.
DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

CHAPITRE PREMIER.

De la résolution des Equations du premier degré, qui renferment plus d'une inconnue.

I.

On a vu, dans la première Partie, comment une quantité inconnue se détermine par une seule équation, & comment on peut déterminer deux inconnues moyennant deux équations, trois

Tome II.

A

inconnues moyennant trois équations, & ainsi de suite; en sorte qu'il faut toujours autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer, du moins quand la question elle-même est déterminée.

Lors donc que la question ne fournit pas autant d'équations qu'on est obligé d'admettre d'inconnues, il y en a de celles-ci qui restent indéterminées, & qui dépendent de notre volonté; & cela fait qu'on nomme ces sortes de questions des *problemes indéterminés*. Ils font le sujet d'une branche particulière de l'analyse, & on appelle cette partie l'analyse indéterminée.

2.

Comme dans ces cas on peut prendre pour une, ou pour plusieurs inconnues, tels nombres qu'on veut, ils admettent aussi plusieurs solutions.

Cependant, comme d'un autre côté on ajoute ordinairement la condition que les nombres cherchés doivent être des nombres entiers & même positifs, ou du moins

des nombres rationnels, le nombre de toutes les solutions possibles de ces questions se trouve fort borné par-là; de sorte que souvent il n'y en a que très-peu de possibles; que d'autres fois il y en a une infinité, mais qui ne se présentent pas à l'esprit facilement; que quelquefois enfin il n'y en a aucune de possible. Il arrive par-là que cette partie de l'analyse demande souvent des artifices tout-à-fait particuliers, & qu'elle sert beaucoup à aiguïser l'esprit des Commenceans, & à leur donner de l'adresse dans le calcul.

3.

Nous commencerons par une des questions les plus faciles, en cherchant deux nombres dont la somme fasse 10. Il sera superflu d'ajouter que ces nombres doivent être entiers & positifs.

Indiquons-les par x & y ; en sorte qu'il faut que $x + y = 10$; on trouve $x = 10 - y$, où y n'est déterminé qu'en tant que cette lettre signifie un nombre entier &

A ij

positif. On pourroit, par conséquent lui substituer tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à l'infini; mais remarquons que x doit pareillement être un nombre positif, & il s'ensuit que y ne peut être pris plus grand que 10, puisqu'autrement x deviendrait négatif; & si on rejette aussi la valeur de $x=0$, on ne peut même faire y plus grand que 9. Ainsi ce ne sont que les solutions suivantes qui ont lieu.

Si $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$,
on a $x=9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.

Or les quatre dernières de ces neuf solutions étant les mêmes que les quatre premières, il est clair que la question n'admet au fond que cinq solutions différentes.

Que si l'on demandoit trois nombres, dont la somme fût 10, on n'auroit qu'à partager en deux parties l'un des nombres que nous venons de trouver, & on obtiendrait de cette manière un plus grand nombre de solutions.

4.

Comme nous n'apercevons-là aucune difficulté, nous passerons à des questions un peu moins faciles.

Question première. Il s'agit de partager 25 en deux parties, dont l'une soit divisible par 2, & dont l'autre soit divisible par 3.

Soit l'une des parties cherchées $= 2x$, & l'autre $= 3y$, il faudra que $2x + 3y = 25$, & par conséquent que $2x = 25 - 3y$. Si l'on divise par 2, on a $x = \frac{25-y}{2}$, d'où nous concluons en premier lieu que $3y$ doit être moindre que 25, & par conséquent y plus petit que 8. Qu'on tire de cette valeur de x autant d'entiers qu'il est possible, c'est-à-dire qu'on divise par le dénominateur 2, on aura $x = 12 - y + \frac{1-y}{2}$; d'où il suit que $1-y$, ou bien $y-1$, doit être divisible par 2. Ainsi nous ferons $y-1=2z$, & nous aurons $y=2z+1$, de sorte que $x = 12 - 2z - 1 - z = 11 - 3z$. Or puisque y ne sauroit être plus grand que 8,

l'on ne peut non plus prendre pour z des nombres qui rendroient $2z+1$ plus grands que 8. Par conséquent il faut que z soit plus petit que 4, c'est-à-dire que z ne peut être pris plus grand que 3, & de-là résultent les solutions qui suivent :

$$\begin{array}{l} \text{Si on fait } z = 0 \quad \left| \begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \\ z=3, \end{array} \right. \\ \text{on a } y = 1 \quad \left| \begin{array}{l} y=3 \\ y=5 \\ y=7, \end{array} \right. \\ \text{\& } x = 11 \quad \left| \begin{array}{l} x=8 \\ x=5 \\ x=2. \end{array} \right. \end{array}$$

Donc les deux parties de 25 qu'on cherche, sont :

$$\text{I.) } 22+3, \text{ II.) } 16+9, \text{ III.) } 10+15, \\ \text{IV.) } 4+21.$$

5.

Question seconde. Partager 100 en deux parties, telles que l'une soit divisible par 7, & l'autre par 11.

Soit donc $7x$ la première partie & $11y$ la seconde, il faudra que $7x+11y=100$; & par conséquent que $x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+x-7y-4y}{7}$, ou que $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; donc il faut que $2-4y$, ou $4y-2$, soit divisible par 7,

Or si l'on peut diviser $4y-2$ par 7, on pourra aussi diviser par 7 sa moitié $2y-1$; qu'on fasse donc $2y-1=7z$, ou $2y=7z+1$, on aura $x=14-y-2z$. Mais puisqu'on aura $y=7z+1$, on aura $y=3z+\frac{1}{2}$; & il faudra faire $z+1=2u$, ou $z=2u-1$; cette supposition donne $y=3z+u$, & par conséquent on peut prendre pour u tout nombre entier qui ne rend pas x ou y négatifs. Or comme y devient $=7u-3$ & $x=19-11u$, la première de ces formules indique que $7u$ doit surpasser 3; & suivant la seconde, $11u$ doit être moindre que 19, ou u moindre que $\frac{19}{11}$; ainsi u ne peut pas même être $=2$; & puisqu'il est impossible que ce nombre soit 0, il faut nécessairement que $u=1$: c'est la seule valeur que cette lettre puisse avoir. Il résulte de-là que $x=8$, & $y=4$, & que les deux parties de 100 qu'on cherchoit, sont I.) 56, & II.) 44.

6.

Question troisieme. Partager 100 en deux parties, telles qu'en divisant la premiere par 5, il reste 2; & qu'en divisant la seconde par 7, il reste 4.

Puisque la premiere partie, divisée par 5, laisse le résidu 2, nous supposons qu'elle soit $= 5x + 2$; & par une raison semblable nous ferons la seconde partie $= 7y + 4$. Nous avons par conséquent $5x + 7y + 6 = 100$, ou $5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y$; d'où nous tirons $x = 18 - y - \frac{2y+4}{5}$. Il s'ensuit de-là que $4 - 2y$, ou $2y - 4$, ou bien la moitié $y - 2$, doit être divisible par 5. Faisons, par cette considération, $y - 2 = 5z$, ou $y = 5z + 2$, nous aurons $x = 16 - 7z$; d'où nous concluons que $7z$ doit être plus petit que 16, & z plus petit que $\frac{16}{7}$, c'est-à-dire que z ne peut surpasser 2. La question proposée admet par conséquent trois solutions.

I. $z = 0$ donne $x = 16$ & $y = 2$, d'où résultent les deux parties de 100 qu'on cherchoit, $82 + 18$.

II. $z = 1$ donne $x = 9$ & $y = 7$, & les deux parties en question sont $47 + 53$.

III. $z = 2$ donne $x = 2$ & $y = 12$, & on a les deux parties $12 + 88$.

7.

Question quatrieme. Deux Paysannes ont ensemble 100 œufs; l'une dit à l'autre: *Quand je compte mes œufs par huitaines, il y a un surplus de 7. La seconde répond: Si je compte les miens par dizaines, je trouve le même surplus de 7. On demande combien chacune avoit d'œufs?*

Comme le nombre des œufs de la premiere Paysanne, divisé par 8, laisse le résidu 7; & que le nombre des œufs de la seconde, divisé par 10, donne le même résidu 7, on exprimera le premier nombre par $8x + 7$, & le second par $10y + 7$; de cette façon $8x + 10y + 14 = 100$, ou $8x = 86 - 10y$, ou $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$. Par conséquent si l'on fait $y - 3 = 4z$, de sorte que $y = 4z + 3$, on aura $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$; d'où il suit

que z doit être plus petit que 7, & z plus petit que 2, c'est-à-dire qu'on n'aura que les deux solutions suivantes.

I.) $z=0$ donne $x=7$, & $y=3$; ainsi la première Payfanne avoit 63 œufs, & la seconde en avoit 37.

II.) $z=1$ donne $x=2$, & $y=7$; donc la première Payfanne avoit 23 œufs, & la seconde en avoit 77.

8.

Question cinquième. Une troupe d'hommes & de femmes a dépensé dans une auberge 1000 fous. Les hommes ont payé 19 fous chacun, & les femmes 13. Combien y avoit-il d'hommes & de femmes?

Soit le nombre des hommes $=x$, & celui des femmes $=y$, on aura l'équation $19x+13y=1000$. Donc $13y=1000-19x=986-12-13x-6x$, & $y=76-x+\frac{12-6x}{13}$; d'où il suit que $12-6x$, ou $6x-12$, ou aussi $x-2$, la sixième partie de ce nombre, doit être divisible par 13. Qu'on fasse donc $x-2=13z$, on aura x

$=13z+2$, & $y=76-13z-2-6z$, ou $y=74-19z$; ce qui fait voir que z doit être moindre que $\frac{74}{19}$, & par conséquent moindre que 4; de sorte que les quatre solutions suivantes peuvent avoir lieu.

I.) $z=0$ donne $x=2$ & $y=74$. Dans ce cas il y avoit deux hommes & soixante & quatorze femmes; ceux-là ont payé 38 fous, & celles-ci 962 fous.

II.) $z=1$ donne le nombre des hommes $x=15$, & celui des femmes $y=55$; ceux-là ont dépensé 285 fous, & celles-ci 715 fous.

III.) $z=2$ donne le nombre des hommes $x=28$, & celui des femmes $y=36$; donc ceux-là ont dépensé 532 fous, & celles-ci 468 fous.

IV.) $z=3$ donne $x=41$, & $y=17$; ainsi les hommes ont dépensé 779 fous, & les femmes ont dépensé 221 fous.

9.

Question sixième. Un Fermier achete à la fois des chevaux & des bœufs pour la

somme de 1770 écus; il paye 31 écus pour chaque cheval, & 21 écus pour chaque bœuf. Combien a-t-il acheté de chevaux & de bœufs?

Soit le nombre des chevaux $= x$, & celui des bœufs $= y$; il faudra que $31x + 21y = 1770$, ou que $21y = 1770 - 31x = 1764 - 6 - 21x - 10x$, c'est-à-dire que $y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$. Donc il faut qu'on puisse diviser $10x - 6$, & aussi la moitié $5x - 3$, par 21. Qu'on suppose donc $5x - 3 = 21z$, on aura $5x = 21z + 3$, & y devient $= 84 - x + 2z$. Or, puisque $x = \frac{21z+3}{5} = 4z + \frac{3}{5}$, il faudra faire encore $z + \frac{3}{5} = 5u$; cette supposition donne $z = 5u - \frac{3}{5}$, $x = 21u - 12$, & $y = 84 - 21u + 12 = 104 - 6 - 102 - 31u$; & il suit de là que u doit être plus grand que 0, & cependant plus petit que 4; ce qui fournit les trois solutions qui suivent:

I.) $u = 1$ donne le nombre des chevaux $x = 9$, & celui des bœufs $y = 279$; donc les premiers ont coûté 279 écus; & les derniers 1491 écus; en tout 1770 écus.

II.) $u = 2$ donne $x = 30$ & $y = 40$; ainsi les chevaux ont coûté 930 écus, & les bœufs ont coûté 840 écus, ce qui fait ensemble 1770 écus.

III.) $u = 3$ donne le nombre des chevaux $x = 51$, & celui des bœufs $y = 9$; ceux-là ont coûté 1581 écus, & ceux-ci 189 écus; cela fait ensemble 1770 écus.

10.

Les questions que nous avons considérées jusqu'à présent, conduisent toutes à une équation de la forme $ax + by = c$, où a , b & c signifient des nombres entiers & positifs, & où l'on demande pour x & y pareillement des nombres entiers positifs. Or si b est négatif, & que l'équation ait la forme $ax = by + c$, on a des questions d'une toute autre espèce, & qui admettent une infinité de solutions: nous allons en traiter aussi, avant que de finir ce Chapitre.

Les plus simples de ces questions sont de la nature de celle-ci: on cherche deux

nombres, dont la différence soit 6. Si l'on fait ici le plus petit nombre $=x$, & le plus grand $=y$, il faudra que $y-x=6$, & que $y=6+x$. Or rien n'empêche maintenant de substituer au lieu de x tous les nombres entiers possibles, & quelque nombre que l'on adopte, y sera toujours de 6 plus grand. Qu'on fasse, par exemple, $x=100$, on aura $y=106$; il est donc clair qu'une infinité de solutions peuvent avoir lieu.

I I.

Viennent ensuite les questions où $c=0$, c'est-à-dire où ax doit simplement équivaloir à by . Qu'on cherche, par exemple, un nombre qui soit divisible tant par 5 que par 7; si on écrit N pour ce nombre, on aura d'abord $N=5x$, puisqu'il faut pouvoir diviser N par 5; ensuite on aura aussi $N=7y$, parce que le même nombre doit être divisible par 7; on aura, par conséquent $5x=7y$ & $x=\frac{7y}{5}$. Or comme 7 ne peut se diviser par 5, il faut que y soit

divisible par 5; qu'on fasse donc $y=5z$, on aura $x=7z$; de sorte que le nombre cherché $N=35z$; & comme on peut prendre pour z un nombre entier quelconque, on voit qu'on peut assigner pour N un nombre infini de valeurs; telles sont :

35, 70, 105, 140, 175, 210, &c.

Si on vouloit, outre la condition supposée, que le nombre N fût aussi divisible par 9, on auroit d'abord $N=35z$, & on feroit de plus $N=9u$. De cette manière $35z=9u$, & $u=\frac{35z}{9}$; & il est clair qu'il faut que z soit divisible par 9. Soit donc $z=9f$; on aura $u=35f$, & le nombre cherché $N=315f$.

I 2.

La difficulté est plus grande, lorsque c n'est pas 0; par exemple, lorsqu'il faut que $5x=7y+3$, équation à laquelle on parvient, en cherchant un nombre N tel qu'on puisse le diviser par 5, & que si on le divise par 7, on obtienne le résidu 3; car il faut alors que $N=5x$, & aussi que N

$=7y+3$, d'où résulte l'équation $5x=7y+3$, & par conséquent $x=\frac{7y+3}{5}=\frac{7y-3}{5}+3$. Qu'on fasse $2y+3=5z$, on aura $x=y+z$; or à cause de $2y+3=5z$, ou de $2y=5z-3$, on a $y=\frac{5z-3}{2}$ ou $y=2z+\frac{1}{2}$. Qu'on suppose donc encore $z=3+2u$, on aura $z=2u+3$, & $y=5u+6$, & $x=y+z=7u+9$. Donc le nombre cherché $N=35u+45$, où on peut substituer au lieu de u non-seulement tous les nombres entiers positifs, mais aussi des nombres négatifs; car, comme il suffit que N devienne positif, on peut faire $u=-1$, ce qui rend $N=10$. On ôbrient les autres valeurs, en ajoutant continuellement 35, c'est-à-dire que les nombres cherchés sont 10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, &c.

13.

Les solutions de ces sortes de questions dépendent du rapport des deux nombres par lesquels il s'agit de diviser, c'est-à-dire qu'elles deviennent plus ou moins longues, suivant la nature de ces diviseurs.

La

La question suivante, par exemple, admet une solution très-courte: On cherche un nombre qui, divisé par 6, laisse le résidu 2; & qui, divisé par 13, donne 3 de résidu.

Soit N ce nombre: il faut d'abord que $N=6x+2$, & après cela que $N=13y+3$; par conséquent $6x+2=13y+3$, & $6x=13y+1$, & $x=\frac{13y+1}{6}=2y+\frac{y+1}{6}$. Qu'on fasse $y+1=6z$, on aura $y=6z-1$, & $x=2y+\frac{y+1}{6}=13z-2$; d'où il suit que le nombre cherché $N=78z-10$. Donc la question admet les valeurs suivantes: 68, 146, 224, 302, 380, &c. qui forment une progression arithmétique, dont la différence est $78=6.13$. Il suffit, par conséquent, de connoître une seule de ces valeurs pour trouver facilement toutes les autres; on n'a qu'à ajouter constamment 78, & soustraire ce nombre aussi longtemps que cela est possible.

14.

La question suivante fournit un exemple d'une solution plus longue & plus pénible.

Tome II.

B

Question huitieme. Trouver un nombre N qui, étant divisé par 39, donne le résidu 16, & tel aussi que si on le divise par 56, on trouve le résidu 27.

Il faut en premier lieu que $N=39p+16$, & en second lieu que $N=56q+27$; ainsi $39p+16=56q+27$, ou $39p=56q+11$, & $p=\frac{56q+11}{39}=q+\frac{17q+11}{39}=q+r$, en exprimant par r la fraction $\frac{17q+11}{39}$. Ainsi $39r=17q+11$, & $q=\frac{39r-11}{17}=2r+\frac{5r-11}{17}=2r+f$; de façon que $f=\frac{5r-11}{17}$, ou $17f=5r-11$, d'où provient $r=\frac{17f+11}{5}=3f+\frac{2f-11}{5}=3f+t$; de manière que $t=\frac{2f-11}{5}$, ou $5t=2f-11$, d'où l'on tire $f=\frac{5t+11}{2}=2t+\frac{t+11}{2}=2t+u$, en faisant $u=\frac{t+11}{2}$ & $t=2u+11$. Or n'y ayant maintenant plus de fractions, on peut prendre u à volonté, & on n'aura plus qu'à passer, en rétrogradant, par les déterminations, suivantes :

$$t=2u+11,$$

$$f=2t+u=5u+22,$$

$$r=3f+t=17u+77,$$

$$q=2r+f=39u+176,$$

$$p=q+r=56u+253;$$

& enfin $N=39.56u+9883$. On trouvera la plus petite valeur possible de N , en faisant $u=-4$; dans cette supposition on a $N=1147$. Que si l'on fait $u=x-4$, on trouve $N=2184x-8736+9883$, ou $N=2184x+1147$. Ces nombres forment par conséquent une progression arithmétique, dont le premier terme est 1147, & dont la différence est 2184; en voici quelques termes :

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, &c.

I 5.

Ajoutons encore quelques autres questions, sur lesquelles on puisse s'exercer.

Question neuvieme. Une compagnie d'hommes & de femmes se trouvent à un pique-nique; chaque homme dépense 25 l. & chaque femme dépense 16 liv. & il se trouve que toutes les femmes ensemble ont payé 1 liv. de plus que les hommes. Combien y avoit-il d'hommes & de femmes?

Soit le nombre des femmes $=p$, celui des hommes $=q$; les femmes auront dé-

B ij

pensé 16*p*, & les hommes 25*q*; ainsi 16*p*
 $= 25q + 1$, & $p = \frac{25q+1}{16} = q + \frac{9q+1}{16} = q + r$.
 Nous venons de faire $r = \frac{9q+1}{16}$, ainsi 9*q*
 $= 16r - 1$, & $q = \frac{16r-1}{9} = r + \frac{7r-1}{9} = r + f$.
 Puis donc que $f = \frac{7r-1}{9}$, ou $9f = 7r - 1$,
 nous avons $r = \frac{9f+1}{7} = f + \frac{2f+1}{7} = f + t$; c'est-
 à-dire que $t = \frac{2f+1}{7}$, ou $7t = 2f + 1$; ainsi
 $f = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, en faisant u
 $= \frac{t-1}{2}$ ou $2u = t - 1$, de sorte que $t = 2u + 1$.

Nous aurons par conséquent en rétro-
 gradant :

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1, \\ f &= 3t + u = 7u + 3, \\ r &= f + t = 9u + 4, \\ q &= r + f = 16u + 7, \\ p &= q + r = 25u + 11; \end{aligned}$$

ainsi le nombre des femmes étoit 25*u* + 11;
 & celui des hommes étoit 16*u* + 7; & on
 peut substituer dans ces formules, au lieu
 de *u*, tels nombres entiers qu'on veut. Les
 résultats les plus petits sont par conséquent
 ceux qui suivent :

Nombre des femmes : = 11, 36, 61, 86, 111, &c.
 — des hommes : = 7, 23, 39, 55, 71, &c.
 Suivant la première solution, ou celle qui
 renferme les plus petits nombres, les fem-
 mes ont dépensé 176 liv. & les hommes
 175 livres, c'est-à-dire une livre de moins
 que les femmes.

16.

Question dixième. Quelqu'un achète des
 chevaux & des bœufs; il paye 31 écus
 par cheval, & 20 écus pour chaque bœuf,
 & il se trouve que les bœufs lui ont coûté
 7 écus de plus que ne lui ont coûté les
 chevaux; combien cet homme a-t-il acheté
 de bœufs & de chevaux?

Supposons que *p* soit le nombre des bœufs
 & *q* celui des chevaux, il faudra que 20*p*
 $= 31q + 7$, & $p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q$
 $+ r$; de cette manière nous avons 20*r*
 $= 11q + 7$, & $q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + f$;
 ainsi $f = \frac{9r-7}{11}$, & $r = \frac{11f+7}{9} = f + \frac{2f+7}{9}$
 $= f + t$, c'est-à-dire que $9t = 2f + 7$, & f
 $= \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u$, moyennant

B iij

nombre 31 & 20, & puis la détermination des lettres p, q, r , &c.

$$\begin{array}{lcl} 31 = 1.20 + 11 & p = 1.q + r \\ 20 = 1.11 + 9 & q = 1.r + f \\ 11 = 1.9 + 2 & r = 1.f + t \\ 9 = 4.2 + 1 & f = 4.t + u \\ 2 = 2.1 + 0 & t = 2.u + 7. \end{array}$$

18.

On peut représenter de la même manière l'exemple précédent de l'article 14.

$$\begin{array}{lcl} 56 = 1.39 + 17 & p = 1.q + r \\ 39 = 2.17 + 5 & q = 2.r + f \\ 17 = 3.5 + 2 & r = 3.f + t \\ 5 = 2.2 + 1 & f = 2.t + u \\ 2 = 2.1 + 0 & t = 2.u + 11. \end{array}$$

19.

Nous sommes donc en état de résoudre de la même manière toutes les questions de cette espèce.

En effet, soit donnée l'équation $bp = aq + n$, où a, b & n signifient des nombres connus. Il ne s'agira ici que de procéder

comme si on cherchoit le plus grand commun diviseur des nombres a & b , on pourra aussi-tôt déterminer p & q par les lettres suivantes, comme on va voir:

Soit $a = Ab + c$	on aura $p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + f$
$c = Cd + e$	$r = Cf + t$
$d = De + f$	$f = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg + o$	$u = Fv + n$

On fera seulement attention encore, que dans la dernière équation il faut donner à n le signe $+$, quand le nombre des équations est impair; & qu'au contraire il faut prendre $-n$, lorsque ce nombre est pair. Et voilà donc comment on peut résoudre avec assez de promptitude les questions dont nous nous occupons dans ce Chapitre: nous en donnerons quelques exemples.

20.

Question onzième. On cherche un nombre qui, étant divisé par 11, donne le résidu 3, & qui étant divisé par 19, donne le résidu 5.

Soit N ce nombre cherché : il faudra d'abord que $N = 11p + 3$; & en second lieu, que $N = 19q + 5$. Donc $11p = 19q + 2$, équation qui fournit la table suivante :

$$\begin{array}{l|l} 19 = 1.11 + 8 & p = q + r \\ 11 = 1.8 + 3 & q = r + f \\ 8 = 2.3 + 2 & r = 2f + t \\ 3 = 1.2 + 1 & f = t + u \\ 2 = 2.1 + 0 & t = 2u + 2, \end{array}$$

où l'on peut donner à u telle valeur qu'on veut, & déterminer par-là successivement, en rétrogradant, les lettres précédentes.

On aura,

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ f &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2f + t = 8u + 6 \\ q &= r + f = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14; \end{aligned}$$

de-là résulte le nombre cherché $N = 209u + 157$; donc le plus petit nombre qui puisse exprimer N , ou satisfaire à la question, est 157.

21.

Question douzième. Trouver un nombre N tel qu'en le divisant par 11, il reste 3, & qu'en le divisant par 19, il reste 5 ; & de plus, que si on divise ce nombre par 29, on obtienne le résidu 10.

La dernière condition exige que $N = 29p + 10$; & comme on a déjà fait le calcul pour les deux autres, il faut, en conséquence de ce qu'on a trouvé, que $N = 209u + 157$, à la place de quoi nous écrirons $N = 209q + 157$; ainsi $29p + 10 = 209q + 157$, ou $29p = 209q + 147$; d'où résulte le type qui suit :

$$\begin{aligned} 209 &= 7.29 + 6; \text{ donc } p = 7q + r, \\ 29 &= 4.6 + 5; \quad q = 4r + f, \\ 6 &= 1.5 + 1; \quad r = f + t, \\ 5 &= 5.1 + 0; \quad f = 5t - 147. \end{aligned}$$

Et si nous revenons maintenant sur nos pas, nous avons

$$\begin{aligned} f &= 5t - 147, \\ r &= f + t = 6t - 147, \\ q &= 4r + f = 29t - 735, \\ p &= 7q + r = 209t - 5292. \end{aligned}$$

Donc $N=6061t-153458$. Le plus petit nombre se trouve en faisant $t=26$, & cette supposition donne $N=4128$.

22.

Une remarque cependant qu'il faut faire nécessairement, c'est que, pour qu'une telle équation $bp=aq+n$ soit résoluble, il faut que les deux nombres a & b n'aient d'autre commun diviseur que 1; car sans cela la question seroit impossible, à moins que le nombre n n'eût le même commun diviseur.

Si l'on demandoit, par exemple, que $9p=15q+t$; comme 9 & 15 ont le commun diviseur 3, & que ce n'est pas un diviseur de 2, il est impossible de résoudre la question, parce que $9p=15q$ pouvant toujours être divisé par 3, ne peut en aucun cas devenir $=2$. Mais si dans cet exemple n étoit $=3$, ou $n=6$, &c. la question seroit possible: il suffiroit de diviser auparavant par 3; car on auroit $3p=5q+t$, équation qui seroit facilement réso-

luble par la règle donnée ci-dessus. On voit donc clairement que les nombres a & b ne doivent avoir d'autre commun diviseur que l'unité, & que notre règle ne peut avoir lieu dans d'autres cas.

23.

Pour le prouver encore plus évidemment, nous traiterons l'équation $9p=15q+t$ suivant la voie ordinaire. Nous trouvons $p=\frac{15q+t}{9}=q+\frac{6q+t}{9}$; de sorte que $9r=6q+t$, ou $6q=9r-t$; ainsi $q=\frac{9r-t}{6}=r+\frac{3r-t}{6}=r+f$; de façon que $3r-t=6f$, ou $3r=6f+t$. Par conséquent $r=\frac{6f+t}{3}=2f+\frac{t}{3}$; or il est bien clair que ceci ne peut jamais devenir un nombre entier, parce que f est nécessairement un nombre entier. Cela sert à confirmer que ces sortes de questions sont impossibles.



CHAPITRE II.

De la regle qu'on nomme regula cœci, où il s'agit de déterminer par deux équations, trois ou un plus grand nombre d'inconnues.

24.

Nous avons vu dans le Chapitre précédent, comment on peut déterminer par une seule équation deux quantités inconnues, au point de les exprimer en nombres entiers & positifs.

Si donc on avoit deux équations, il faudroit, pour que la question fût indéterminée, que ces équations renfermassent plus de deux inconnues. Or il se présente de ces questions dans les livres d'Arithmétique ordinaires; on les résout par la règle dite *regula cœci*, nous ferons voir les fondemens de cette règle.

25.

Nous commencerons par un exemple.

Question premiere. Trente personnes, hommes, femmes & enfans dépensent 50 écus dans une auberge; l'écot d'un homme est 3 écus, celui d'une femme est 2 écus, & celui d'un enfant est un écu; combien y avoit il de personnes de chaque classe?

Soit le nombre des hommes $= p$, celui des femmes $= q$, & celui des enfans $= r$, nous aurons les deux équations suivantes :
 I.) $p + q + r = 30$, II.) $3p + 2q + r = 50$.
 Et il s'agit d'en tirer les trois lettres, p , q & r en nombres entiers & positifs. La première équation donne $r = 30 - p - q$, d'où nous concluons d'abord que $p + q$ doit être moindre que 30; & substituant cette valeur de r dans la seconde équation, nous avons
 $3p + 2q + 30 - p - q = 50$, de sorte que $q = 20 - 2p$. & $p + q = 20 - p$, ce qui est évidemment aussi, moindre que 30. Or comme on peut, en vertu de cette équation, prendre pour p , tous les nombres qui ne

passent pas 10, on aura les onze solutions suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{Nombre des} \\ \text{hommes,} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \\ \text{Nombre des} \\ \text{femmes,} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} q = 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, \\ \text{Nombre des} \\ \text{enfants,} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} r = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20; \end{array} \right.$$

& si on omet la première & la dernière, il en restera neuf.

26.

Question seconde. Quelqu'un achere 100 pièces de bétail, des porcs, des chevres & des moutons, pour 100 écus; les porcs lui coûtent $3\frac{1}{2}$ écus la pièce; les chevres, $1\frac{1}{3}$ écu, & les moutons, $\frac{1}{2}$ écu: combien y avoit il d'animaux de chaque espece?

Soit le nombre des porcs $= p$, celui des chevres $= q$, celui des moutons $= r$, on aura les deux équations suivantes: $L) p + q + r = 100$, $II.) 3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{3}q + \frac{1}{2}r = 100$; & cette dernière étant multipliée par 6, afin de chasser les fractions, se transforme en celle-ci, $21p + 8q + 3r = 600$. Or la première donne $r = 100 - p - q$; & si l'on substitue

substitue cette valeur à r dans la seconde, on a $18p + 5q = 300$, ou $5q = 300 - 18p$, & $q = 60 - \frac{18}{5}p$. Par conséquent il faut que $18p$ soit divisible par 5, & renferme 5 comme facteur. Qu'on fasse donc $p = 5f$, on aura $q = 60 - 18f$, & $r = 13f + 40$, où l'on peut prendre pour f un nombre entier quelconque, pourvu qu'il soit tel que q ne devienne pas négatif. Mais cette condition limite la valeur de f à 3, de sorte que si on exclut aussi 0, il ne peut y avoir que trois solutions du problème; ce sont les suivantes:

$$\text{Lorsque } f = 1, 2, 3,$$

$$\text{on a } p = 5, 10, 15,$$

$$q = 42, 24, 16,$$

$$r = 53, 66, 79.$$

27.

Lorsqu'on veut soi-même se proposer de tels exemples, il faut faire attention sur-tout qu'ils soient possibles; & pour pouvoir en juger, voici ce qu'il faut observer:

Soient les deux équations auxquelles nous

Tome II.

C

parvenions jusqu'à présent, représentées par I.) $x+y+z=a$, II.) $fx+gy+hz=b$, où f , g & h , ainsi que a & b , sont des nombres donnés, si nous supposons qu'entre les nombres f , g & h le premier f soit le plus grand, & h le plus petit; comme, à cause de $x+y+z=a$, nous avons $fx+fy+fz=fa$, il est clair que $fx+fy+fz$ est plus grand que $fx+gy+hz$; par conséquent il faut que fa soit plus grand que b , ou que b soit plus petit que fa , & puis que de plus $hx+hy+hz=ha$, & que $hx+hy+hz$ est certainement plus petit que $fx+gy+hz$, il faut aussi que ha soit plus petit que b , ou b plus grand que ha . Il s'ensuit donc de-là que si b n'est pas plus petit que fa , & en même temps plus grand que ha , la question sera impossible.

On exprime cette condition aussi, en disant que b doit être contenu entre les limites fa & ha ; & il faut de plus faire attention que ce nombre n'approche pas trop de l'une ou de l'autre limite, parce que cela feroit qu'on ne pourroit pas déterminer les autres lettres.

Dans l'exemple précédent, où $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ & $h=\frac{1}{2}$, les limites étoient 350 & 50; or si on vouloit supposer $b=51$ au lieu de 100, les équations deviendroient $x+y+z=100$, & $3\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=51$, ou, en chassant les fractions, $21x+8y+3z=306$; qu'on multiplie la première par 3, de sorte que $3x+3y+3z=300$; si l'on soustrait cette équation de l'autre, il reste $18x+5y=6$, ce qu'on voit sur le champ être impossible, parce que x & y doivent être des nombres entiers & positifs.

28.

Les Orfèvres & les Monnoyeurs tirent grand parti de cette règle, quand ils se proposent de faire, de trois ou de plusieurs sortes d'argent, un alliage d'un prix donné, ainsi que l'exemple suivant le fera voir.

Question troisième. Un Monnoyeur a trois sortes d'argent; la première à 7 onces, la seconde à $5\frac{1}{2}$ onces, la troisième à $4\frac{1}{2}$ onces; il a à faire un alliage de 30 marcs

pesant, à 6 onces; combien de marcs doit-il prendre de chaque sorte?

Qu'il prenne x marcs de la premiere sorte, y marcs de la seconde & z marcs de la troisieme, il aura $x+y+z=30$, & c'est la premiere équation.

Ensuite, puisqu'un marc de la premiere sorte contient 7 onces d'argent fin, les x marcs de cette sorte contiendront $7x$ onces de tel argent; de même les y marcs de la seconde sorte contiendront $5\frac{1}{2}y$ onces, & les z marcs de la troisieme sorte contiendront $4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin; de sorte que toute la masse contiendra $7x + 5\frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2}z$ onces d'argent fin. Or puisque cet alliage pèse 30 marcs, & que chacun de ces marcs contient 6 onces d'argent fin; il s'ensuit que la masse entiere contiendra 180 onces d'argent fin; & de-là résulte la seconde équation $7x + 5\frac{1}{2}y + 4\frac{1}{2}z = 180$, ou $14x + 11y + 9z = 360$. Si l'on soustrait maintenant de cette équation la premiere prise neuf fois, ou $9x + 9y + 9z$

$= 270$, il reste $5x + 2y = 90$, équation qui doit donner en nombres entiers les valeurs de x & de y . Quant à la valeur de z , on la tirera ensuite de l'équation $z = 30 - x - y$. Or l'équation précédente donne $2y = 90 - 5x$ & $y = 45 - \frac{5x}{2}$; soit donc $x = 2u$, on aura $y = 45 - 5u$, & $z = 3u - 15$; c'est signe que u doit être plus grand que 4, & cependant plus petit que 10; & par conséquent la question admet les solutions suivantes:

$u = 5,$	$6,$	$7,$	$8,$	$9,$
$x = 10,$	$12,$	$14,$	$16,$	$18,$
$y = 20,$	$15,$	$10,$	$5,$	$0,$
$z = 0,$	$3,$	$6,$	$9,$	$12,$

29.

Il se présente quelquefois des questions qui renferment plus de trois inconnues, mais on les résout de la même manière, comme l'exemple suivant le fera voir.

Question quatrieme. Quelqu'un achete 100 pieces de bétail pour 100 écus; savoir,

C iij

des bœufs à 10 écus la piece, des vaches à 5 écus, des veaux à 2 écus, & des moutons à $\frac{1}{2}$ écu la piece; combien a-t-il acheté de bœufs, de vaches, de veaux & de moutons?

Soit le nombre des bœufs $= p$, celui des vaches $= q$, celui des veaux $= r$, & celui des moutons $= f$; la premiere équation est $p + q + r + f = 100$, & la seconde est $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}f = 100$, ou, en retranchant les fractions, $20p + 10q + 4r + f = 200$; soustrayant la premiere équation de celle ci, il reste $19p + 9q + 3r = 100$, & d'où l'on tire $3r = 100 - 19p - 9q$, & $r = 33\frac{1}{3} - 6p - \frac{3}{5}q$, ou $r = 33 - 6p - 3q + \frac{1}{5}q$; donc il faut que $r = p$ ou $p - 1$ soit divisible par 3. Qu'on fasse

$$p - 1 = 3t, \text{ on aura}$$

$$p = 3t + 1,$$

$$q = q,$$

$$r = 27 - 19t - 3q,$$

$$f = 72 + 2q + 16t;$$

il s'ensuit de-là que $19t + 3q$ doit être

moindre que 27, & que, pourvu que cette condition s'observe, on peut au reste donner à q & à t telle valeur qu'on veut; cela posé, nous aurons à considérer les cas suivans:

I. Si $t = 0$	II. Si $t = 1$
on a $p = 1$	$p = 4$
$q = q$	$q = q$
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$
$f = 72 + 2q.$	$f = 88 + 2q.$

On ne peut faire $t = 2$, parce que r deviendrait négatif.

Dans le premier cas q ne doit pas surpasser 9, & dans le second cas ce nombre ne doit pas excéder 2; ainsi ces deux cas donnent les solutions qui suivent.

Le premier donne les dix solutions que voici:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
f	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Le second cas fournit les trois solutions suivantes :

	I.	II.	III.
<i>p</i>	4	4	4
<i>q</i>	0	1	2
<i>r</i>	8	5	2
<i>f</i>	88	90	92

Voilà donc en tout treize solutions, & elles se réduisent à dix, si on exclut celles qui renferment un zéro.

30.

La méthode ne laisseroit pas d'être la même, quand même, dans la première équation, les lettres seroient multipliées par des nombres donnés, comme on le verra par l'exemple suivant :

Question cinquième. Trouver trois nombres entiers, tels que si on multiplie le premier par 3, le second par 5 & le troisième par 7, la somme des produits soit 560; & que si on multiplie le premier par 9, le second par 25 & le troisième par 49, la somme des produits soit 2920.

Soit le premier nombre $=x$, le second $=y$, le troisième $=z$, on aura les deux équations, I.) $3x+5y+7z=560$, II.) $9x+25y+49z=2920$. Si on soustrait de la seconde la première prise trois fois, ou $9x+15y+21z=1680$, il reste $10y+28z=1240$; divisant par 2, on a $5y+14z=620$, d'où l'on tire $y=124-\frac{14z}{5}$. Ainsi z doit être divisible par 5; qu'on fasse donc $z=5u$, on aura $y=124-14u$; ces valeurs étant substituées dans la première équation, on a $3x-35u+620=560$, ou $3x=35u-60$, & $x=\frac{35u}{3}-20$; c'est pourquoi l'on fera $u=3t$, & on aura enfin la solution suivante, $x=35t-20$, $y=124-42t$, & $z=15t$, où on peut substituer au lieu de t un nombre entier quelconque, mais tel cependant que t surpasse 0, & soit moindre que 3, de sorte qu'on se trouve borné en effet aux deux solutions suivantes :

I.) Si $t=1$, on a $x=15$, $y=82$, $z=15$.
 II.) Si $t=2$, on a $x=50$, $y=40$, $z=30$.

CHAPITRE III.

Des Equations indéterminées composées, dans lesquelles l'une des inconnues ne passe pas le premier degré.

31.

Nous passerons à présent aux équations indéterminées, dans lesquelles on cherche deux quantités inconnues, &c où l'une de ces inconnues est multipliée par l'autre, ou élevée à une puissance plus haute que la première, tandis que l'autre inconnue ne s'y trouve cependant encore qu'au premier degré. Il est évident que les équations de cette espèce peuvent se représenter par l'expression générale qui suit :

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^2 + gxy + hx^2 + kx^3y + \&c. = 0.$$

Comme dans cette équation y ne passe pas le premier degré, cette lettre se détermine facilement; mais il faut au reste,

comme auparavant, que les valeurs tant de x que de y , soient assignées en nombres entiers.

Nous allons considérer quelques-uns de ces cas, en commençant par les plus faciles.

32.

Question première. Trouver deux nombres tels que, si on ajoute leur produit à leur somme, on obtienne 79.

Nommons x & y les deux nombres cherchés; il faudra que $xy + x + y = 79$; ainsi $xy + y = 79 - x$, & $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$, par où l'on voit que $x + 1$ doit être un diviseur de 80. Or 80 ayant beaucoup de diviseurs, on aura aussi plusieurs valeurs de x , comme on va voir :

Les diviseurs de 80 sont	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
donc $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
& $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

Mais comme les dernières solutions sont les mêmes que les premières, on n'a réellement que les cinq solutions suivantes :

I.	II.	III.	IV.	V.
0	1	3	4	7
79	39	19	15	19

33.

C'est de la même manière qu'on pourra résoudre aussi l'équation générale $xy + ax + by = c$; car on aura $xy + by = c - ax$, & $y = \frac{c - ax}{x + b}$, ou $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$; c'est-à-dire que $x + b$ doit être un diviseur du nombre connu $ab + c$; de sorte que chaque diviseur de ce nombre donne une valeur de x . Qu'on fasse donc $ab + c = fg$, on aura $y = -a + \frac{fg}{x + b}$; & supposant $x + b = f$ ou $x = f - b$, il est clair que $y = -a + g$ ou $y = g - a$, & par conséquent qu'on aura même deux solutions pour chaque manière de représenter le nombre $ab + c$ par un produit tel que fg . De ces deux solutions, l'une est $x = f - b$ & $y = g - a$, & l'autre s'obtient en faisant $x + b = g$, dans lequel cas $x = g - b$ & $y = f - a$.

Si donc on se proposoit l'équation $xy + 2x + 3y = 42$, on auroit $a = 2$; $b = 3$;

42

& $c = 42$; par conséquent $y = -2 + \frac{48}{x + 3}$. Or le nombre 48 peut se représenter de plusieurs manières par deux facteurs, comme fg , & dans chacun de ces cas on aura toujours, soit $x = f - 3$ & $y = g - 2$, soit aussi $x = g - 3$ & $y = f - 2$. Voici le développement de cet exemple:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Facteurs	1. 48	2. 24	3. 16	4. 12	6. 8
	x y	x y	x y	x y	x y
Nombres	-2 46	-1 22	0 14	1 10	3 6
ou	45 -1	21 0	13 1	9 2	5 4

34.

L'équation peut s'exprimer encore plus généralement, en écrivant $mxy = ax + by + c$, où a , b , c & m sont des nombres donnés, & où l'on cherche pour x & y des nombres entiers inconnus.

Qu'on sépare d'abord y , on aura $y = \frac{ax + c}{mx - b}$; & chassant x du numérateur, en multipliant par m de part & d'autre, on aura $my = \frac{max + mc}{mx - b} = a + \frac{mc + ab}{mx - b}$. On a main-

tenant une fraction dont le numérateur est un nombre connu, & dont le dénominateur doit être un diviseur de ce nombre; qu'on représente donc le numérateur par un produit de deux facteurs, comme fg , ce qui peut souvent se faire de plusieurs manières, & qu'on voye si un de ces facteurs peut se comparer avec $mx - b$, de façon que $mx - b = f$. Or il faut pour cet effet, puisque $x = \frac{f-b}{m}$, que $f + b$ soit divisible par m ; & il s'ensuit de-là que parmi les facteurs de $mc + ab$, on ne peut employer que ceux qui sont tels, qu'en y ajoutant b , les sommes soient divisibles par m . Nous allons éclaircir ceci par un exemple.

Soit l'équation $xy = 2x + 3y + 18$, on aura $y = \frac{2x+18}{x-3}$ & $xy = \frac{10x+90}{x-3} = 2 + \frac{96}{x-3}$, il s'agit par conséquent de trouver ceux des diviseurs de 96 qui, ajoutés à 3, donnent des sommes divisibles par 5. Or si l'on considère tous les diviseurs de 96, qui sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, on voit facilement qu'il n'y en a que ces trois, 2, 12, 32, qui peuvent servir.

Soit donc I.) $x - 3 = 2$, on aura $xy = 50$,
& par conséquent $x = 1$, &
 $y = 10$.

II.) $x - 3 = 12$, on aura $xy = 10$,
& par conséquent $x = 3$, &
 $y = 2$.

III.) $x - 3 = 32$, on aura $xy = 5$,
& par conséquent $x = 7$, &
 $y = 1$.

35.

Comme dans cette solution générale on a $my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, il sera à propos d'observer que, si un nombre compris dans la formule $mc + ab$, a un diviseur de la forme $mx - b$, le quotient dans ce cas doit être nécessairement compris dans la formule $my - a$, & qu'on peut alors représenter le nombre $mc + ab$ par un produit tel que $(mx - b)(my - a)$. Soit, par exemple, $m = 12$, $a = 5$, $b = 7$ & $c = 15$, on aura $12y - 5 = \frac{215}{12x-7}$; or les diviseurs de 215 sont 1, 5, 43, 215; il faut en choisir ceux qui sont compris dans la formule $12x$

—7, ou qui sont tels qu'en y ajoutant 7, la somme soit divisible par 12; mais il n'y a que 5 qui satisfasse à cette condition, ainsi $12x-7=5$ & $12y-5=43$; & de même que la première de ces équations donne $x=1$, on trouve aussi par l'autre y en nombres entiers, savoir $y=4$. Cette propriété est de la plus grande importance relativement à la nature des nombres, & mérite par-là qu'on y fasse attention particulièrement.

36.

Considérons maintenant aussi une équation de cette espèce, $xy+xx=2x+3y+29$. Elle nous donne $y=\frac{2x-29}{x-3}$, ou $y=-x-1+\frac{26}{x-3}$; ainsi $x-3$ doit être un diviseur de 26, & dans ce cas, la division étant faite, le quotient sera $=y+x+1$; or les diviseurs de 26 étant 1, 2, 13, 26, nous aurons donc les solutions suivantes:

I.) $x-3=1$, ou $x=4$; de sorte que $y+x+1=1+y+5=26$, & $y=21$;

II.)

II.) $x-3=2$, ou $x=5$; ainsi $y+x+1=y+6=13$, & $y=7$;

III.) $x-3=13$, ou $x=16$; ainsi $y+x+1=y+17=2$, & $y=-15$.

Cette dernière valeur étant négative doit être omise, & par la même raison on ne pourra tenir compte du dernier cas, $x-3=26$.

37.

Il ne sera pas nécessaire de développer ici un plus grand nombre de ces formules, où on ne rencontre que la première puissance de y & de plus hautes puissances de x ; car ces cas ne se présentent que rarement, & peuvent d'ailleurs toujours se résoudre par la méthode que nous avons expliquée. Mais lorsque y aussi est élevé à la seconde puissance, ou à un degré encore plus haut, & qu'on veut en déterminer la valeur par les règles données, on parvient à des signes radicaux, qui comprennent des puissances secondes ou encore plus hautes de x , & il s'agit alors de trouver

pour x des valeurs telles qu'elles fassent évanouir les signes radicaux ou l'irrationalité. Or le plus grand art de l'analyse indéterminée, consiste précisément à rendre rationnelles ces formules sourdes ou incommensurables ; nous en fournirons les moyens dans les Chapitres suivans.

CHAPITRE IV.

De la maniere de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $\sqrt{a+bx+cx^2}$.

38.

IL est donc question présentement de déterminer les valeurs qu'on peut adopter pour x , afin que la formule $a+bx+cx^2$ devienne effectivement un carré, & par conséquent qu'on puisse en assigner une racine rationnelle. Or les lettres a , b & c signifient des nombres donnés ; c'est de la nature de ces nombres que dépend principalement la détermination de l'inconnue

x , & nous remarquerons d'avance que dans bien des cas la solution devient impossible. Mais lors même qu'elle est possible, il faut du moins se contenter au commencement de pouvoir assigner pour la lettre x des valeurs rationnelles ; sans exiger précisément que ces valeurs soient même des nombres entiers ; cette condition entraîne des recherches tout-à-fait particulières.

39.

Nous supposons ici, comme on voit, que la formule ne s'étend qu'aux secondes puissances de x ; les degrés plus élevés exigent des méthodes différentes, dont nous parlerons plus bas.

Nous remarquerons d'abord que si la seconde puissance même ne s'y trouvoit pas, & que c fût $=0$, la question n'auroit aucune difficulté ; car si $\sqrt{a+bx}$ étoit la formule proposée, & qu'il fallût déterminer x , de manière que $a+bx$ fût un carré, on n'auroit qu'à faire $a+bx=yy$, d'où l'on

D ij

obtiendrait aussi-tôt $x = \frac{yy-a}{b}$; or quelque nombre que l'on substituerait ici au lieu de y , il en résulteroit toujours pour x une valeur telle que $a+bx$ seroit un carré, & par conséquent $\sqrt{a+bx}$ une quantité rationnelle.

40.

Nous commencerons donc par la formule $\sqrt{1+xx}$, c'est-à-dire que nous chercherons pour x des valeurs telles, qu'en ajoutant à leurs carrés l'unité, les sommes soient pareillement des carrés; & comme il est clair que ces valeurs de x ne pourront être des nombres entiers, il faudra se contenter de trouver les nombres fractionnaires qui les expriment.

41.

Si on vouloit, à cause que $1+xx$ doit être un carré, supposer $1+xx=yy$, on auroit $xx=yy-1$, & $x=\sqrt{yy-1}$; ainsi il faudroit, afin de trouver x , chercher pour y des nombres tels que leurs carrés,

diminués de l'unité, donnaient aussi des carrés; & par conséquent on retomberoit dans une question aussi difficile que la première, & on n'auroit pas fait un pas en avant.

Il est cependant certain qu'il y a réellement des fractions qui, étant substituées à la place de x , font que $1+xx$ devient un carré; on peut s'en convaincre par les cas suivans :

- I.) Si $x = \frac{3}{4}$, on a $1+xx = \frac{25}{16}$; par conséquent $\sqrt{1+xx} = \frac{5}{4}$.
- II.) $1+xx$ devient pareillement un carré; si $x = \frac{4}{3}$, on trouve $\sqrt{1+xx} = \frac{5}{3}$.
- III.) Si on fait $x = \frac{5}{12}$, on obtient $1+xx = \frac{169}{144}$, dont la racine carrée est $\frac{13}{12}$.

Mais il s'agit de faire voir comment on doit trouver ces valeurs de x , & même tous les nombres possibles de cette espece.

42.

Il y a deux méthodes pour cela. La première demande qu'on fasse $\sqrt{1+xx} = x$

On veut que $pp+qq=rr$; on n'a donc qu'à faire $p=mn$ & $q=nn-mm$, & on aura $r=nn+mm$.

De plus, comme $(nn+mm)^2 = (2mn)^2 = (nn-mm)^2$, on peut aussi résoudre la question qui suit:

Trouver deux carrés, dont la différence soit de même un nombre carré.

Car si on veut que $pp-qq=rr$, on n'a qu'à supposer $p=nn+mm$ & $q=2mn$, & on aura $r=nn-mm$. On pourroit aussi faire $p=nn+mm$ & $q=nn-mm$, & on auroit $r=2mn$.

45.

Nous avons parlé de deux manières de donner à la formule $1+xx$ la forme d'un carré; voici donc l'autre méthode:

Qu'on suppose $\sqrt{1+xx} = 1 + \frac{mx}{n}$; on aura $1+xx = 1 + \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$; si l'on soustrait de part & d'autre 1, on a $xx = \frac{2mx}{n} + \frac{m^2x^2}{n^2}$; cette équation se divise par x , & par conséquent on a $x = \frac{2m}{n} + \frac{m^2x}{n^2}$, ou $nxx = 2mn + m^2x$, d'où l'on tire $x = \frac{2mn}{n^2 - m^2}$.

Ayant trouvé cette valeur de x , on a

$1+xx = 1 + \frac{4m^2nn}{n^2 - 2m^2nn + m^4}$ ou $= \frac{n^4 + 2m^2nn + m^4}{n^2 - 2m^2nn + m^4}$, ce qui est le carré de $\frac{nn+mm}{nn-mm}$. Or comme il résulte de-là l'équation $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn-mm)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(nn-mm)^2}$, nous aurons, ainsi que ci-dessus, $(nn-mm)^2 + (2mn)^2 = (nn+mm)^2$, c'est-à-dire les deux mêmes carrés dont la somme est pareillement un carré.

46.

Le cas que nous venons de développer d'une manière détaillée, nous fournit deux méthodes pour transformer en un carré la formule générale $a+bx+cx^2$. La première de ces méthodes s'applique à tous les cas où c est un carré; la seconde se rapporte à ceux où a est un carré; nous nous arrêterons à l'une & à l'autre supposition.

I.) Supposons d'abord que c soit un carré,

ou que la formule proposée soit $a+bx+ffxx$; puisqu'elle doit être un carré, nous ferons $\sqrt{a+bx+ffxx}=fx+\frac{m}{n}$, &c nous aurons $a+bx+ffxx=ffxx+\frac{2mf}{n}x+\frac{mm}{nn}$, où les termes affectés de xx se détruisent, de sorte que $a+bx=\frac{2mf}{n}x+\frac{mm}{nn}$; si nous multiplions par nn , nous avons $na+nnbx=2mnfx+mm$; nous en concluons $x=\frac{mm-ana}{nab-2anf}$, &c en substituant à x cette valeur, nous trouvons $\sqrt{a+bx+ffxx}=\frac{mmf-anaf}{nab-mnf}+\frac{m}{n}=\frac{nab-mmf-anaf}{nab-2anf}$.

47.

Comme nous avons trouvé pour x une fraction, nous ferons $x=\frac{p}{q}$, en sorte que $p=mm-ana$, &c $q=nab-2anf$; ainsi la formule $a+\frac{p}{q}x+\frac{ff}{qq}xx$ est un carré; &c comme elle est pareillement un carré, si on la multiplie par le carré qq , il s'ensuit que la formule $aqg+bpq+ffpp$ est aussi un carré, si on suppose $p=mm-ana$ &c $q=nab-2anf$. Il est clair qu'il résulte de-là une infinité de solutions en nombres entiers,

parce que les valeurs des lettres m & n sont arbitraires.

48.

II.) Le second cas que nous avons à considérer, est celui où a est un carré. Soit donc proposée la formule $ff+bx+cx$, dont il s'agit de faire un carré. Nous supposerons pour cet effet $\sqrt{ff+bx+cx}=f+\frac{m}{n}$, &c nous aurons $ff+bx+cx=ff+\frac{2mf}{n}x+\frac{mm}{nn}$, où les ff se détruisant, on peut diviser les termes restans par x , de sorte qu'on obtient $b+cx=\frac{2mf}{n}+\frac{mm}{na}$, ou $nab+nacx=2mf+mnx$; ou $nacx=2mf+mnx-nab$, ou enfin $x=\frac{2mf-nab}{nac-mm}$. Si nous substituons maintenant cette valeur à la place de x , nous avons $\sqrt{ff+bx+cx}=f+\frac{2mf-nab}{nac-mm}$, &c en faisant $x=\frac{p}{q}$, nous pourrions, de la même manière que ci-dessus, transformer en carré la formule $ffqg+bpq+cqp$, favoir en faisant $p=2mf-nab$, &c $q=nac-mm$.

49.

On doit distinguer principalement ici le cas où $a=0$, c'est-à-dire où il s'agit de faire un carré de la formule $bx+cx$; car on n'a qu'à supposer $\sqrt{bx+cx} = \frac{mx}{n}$, on aura l'équation $bx+cx = \frac{m^2x^2}{n^2}$ qui, divisée par x & multipliée par nn , donne $bnn+cnx=mmx$, & par conséquent $x = \frac{nb}{mm-cn}$.

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres trigonaux qui sont en même temps des carrés, il faudra que $\frac{x+x}{2}$, & par conséquent aussi $2xx+2x$, soit un carré. Supposons que $\frac{2mx}{m-n}$ soit ce carré, nous aurons $2mnx+2nn=mmx$, & $x = \frac{2nn}{mm-2n}$; on peut substituer dans cette valeur, au lieu de m & de n , tous les nombres possibles, mais on trouvera pour x ordinairement une fraction, quelquefois cependant on parviendra aussi à des nombres entiers, par exemple, si $m=3$ & $n=2$, on trouve $x=8$, dont le nombre triangu-

laire, qui est 36, est en même temps un carré.

On peut aussi faire $m=7$ & $n=5$; dans ce cas $x=-50$, dont le triangle 1225 est en même temps celui de +49 & le carré de 35. On auroit trouvé le même résultat en faisant $n=7$ & $m=10$; car dans ce cas on a pareillement $x=49$.

De même, si $m=17$ & $n=12$, on trouve $x=288$, le nombre trigonal en est $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, ce qui est un carré dont la racine est $=12 \cdot 17=204$.

50.

Nous remarquerons à l'égard de ce dernier cas, que la formule $bx+cx$ a pu être transformée en un carré par la raison qu'elle avoit un facteur, savoir x ; cette observation nous conduit à de nouveaux cas, dans lesquels la formule $a+bx+cx$ peut pareillement devenir un carré, lors même que ni a ni c ne sont des carrés.

Ces cas sont ceux où $a+bx+cx$ peut se décomposer en deux facteurs, & cela

arrive lorsque $bb - 4ac$ est un carré. Pour le prouver, nous remarquerons que les facteurs dépendent toujours des racines d'une équation, & qu'ainsi il faut supposer $a + bx + cxx = 0$; cela posé, on a $cxx = -bx - a$, & $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, d'où l'on tire $x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}}$, ou $x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{bb - 4ac}}{2c}$; & il est clair que si $bb - 4ac$ est un carré, cette quantité devient rationnelle.

Soit donc $bb - 4ac = dd$, les racines seront $-\frac{b \pm d}{2c}$, c'est-à-dire que $x = -\frac{b \pm d}{2c}$; & par conséquent les diviseurs de la formule $a + bx + cxx$ sont $x + \frac{b-d}{2c}$ & $x + \frac{b+d}{2c}$; & si on multiplie ces facteurs l'un par l'autre, on retrouve la même formule, à cela près qu'elle est divisée par c ; car le produit est $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4c} - \frac{dd}{4c}$; & puisque $dd = bb - 4ac$, on a $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4c} - \frac{bb - 4ac}{4c} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{ac}{c}$; ce qui étant multiplié par c , donne $cxx + bx + a$. On n'a donc qu'à multiplier l'un des facteurs par c , & on aura la formule en question exprimée par le produit

$$(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2})(cx + \frac{b}{2} + \frac{d}{2});$$

& on voit que cette solution ne peut manquer d'avoir lieu toutes les fois que $bb - 4ac$ est un carré.

§ I.

De-là résulte le troisième cas, dans lequel la formule $a + bx + cxx$ peut se transformer en un carré, & que nous allons joindre aux deux autres.

III.) Ce cas, ainsi que nous l'avons insinué, a lieu lorsque notre formule peut se représenter par un produit, tel que $(f + gx).(h + kx)$. Pour faire de cette quantité un carré, supposons sa racine, ou $\sqrt{(f + gx).(h + kx)} = \frac{m \cdot (f + gx)}{n}$; nous aurons $(f + gx).(h + kx) = \frac{mm \cdot (f + gx)^2}{nn}$; & en divisant cette équation par $f + gx$, on a $h + kx = \frac{mm \cdot (f + gx)}{nn}$, c'est-à-dire $hnn + knnx = fmm + gmmx$, & par conséquent $x = \frac{fmm - hnn}{knn - gmn}$.

52.

Pour éclaircir ce résultat, soit proposée la question suivante:

Première question. Trouver tous les nombres x , tels que si du double de leur carré on retranche 2, le reste soit un carré.

Puisque c'est $2xx - 2$ qui doit être un carré, il faut faire attention que cette formule s'exprime par les facteurs suivans, $2.x + 1.x - 1$. Si donc on en suppose la racine $\frac{m(x-1)}{n}$, on a $2(x+1)(x-1) = \frac{mm(xx+1)^2}{nn}$; divisant par $x+1$ & multipliant par nn , on aura $2nnx - 2nn = mmx + mm$, & de-là $x = \frac{mm + 2nn}{2nn - mm}$.

Si l'on fait $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=3$, & $2xx - 2 = 16 = 4^2$.

Que si $m=3$ & $n=2$, on a $x=17$; or comme x ne se rencontre qu'élevé au second degré, il est indifférent qu'on prenne $x=17$ ou $x=-17$; l'une & l'autre supposition donne également $2xx - 2 = 576 = 24^2$.

53.

53.

Seconde question. Soit proposée la formule $6 + 13x + 6xx$, pour être transformée en un carré, nous avons ici $a=6$, $b=13$ & $c=6$, où ni a ni c n'est un carré. Qu'on voie donc si $bb - 4ac$ devient un carré, on trouve 25; ainsi on est sûr que la formule peut être représentée par deux facteurs; ces facteurs sont $(2+3x)(3+2x)$. Que $\frac{m(2+3x)}{n}$ soit leur racine, on aura $(2+3x)(3+2x) = \frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, ce qui se change

en $3an + 2nnx = 2mm + 3mmx$, d'où l'on tire $x = \frac{2mm - 3an}{3an - 2mm} = \frac{3nn - 2mm}{3nn - 2mm}$. Or afin que le numérateur devienne positif, il faut que $3nn$ soit plus grand que $2mm$, & par conséquent $2mm$ plus petit que $3nn$; c'est-à-dire qu'il faut que $\frac{2mm}{nn}$ soit plus petit que $\frac{3}{2}$. Quant au dénominateur, s'il doit devoir positif, on voit que $3nn$ doit surpasser $2mm$, & par conséquent $\frac{2mm}{nn}$ doit être plus grand que $\frac{3}{2}$. Si donc on veut trouver pour x des nombres positifs, il faut prendre pour

Tome II.

E

m & n des nombres tels que $\frac{mn}{an}$ soit moindre que $\frac{1}{2}$ & cependant plus grand que $\frac{1}{3}$.

Soit, par exemple, $m=6$ & $n=5$, on aura $\frac{mn}{an} = \frac{36}{25}$, ce qui est moindre que $\frac{1}{2}$ & évidemment plus grand que $\frac{1}{3}$; c'est pourquoy on trouve $x = +\frac{3}{18}$.

§ 4.

IV.) Ce troisieme cas donne lieu d'en considérer encore un quatrieme, qui est celui où la formule $a+bx+cx^2$ se décompose en deux parties, telle que la premiere soit un carré, & que la seconde soit le produit de deux facteurs; c'est-à-dire que dans ce cas la formule doit être représentée par une quantité de la forme $pp+qr$, où les lettres p , q & r indiquent des quantités de la forme $f+gx$. Il est clair que la regle pour ce cas sera de faire $\sqrt{pp+qr}=p+\frac{mq}{n}$; car on aura $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmq^2}{nn}$, où les pp s'en vont, après quoi l'on peut diviser par q , de sorte qu'on obtient $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$, ou $nnr=2mnp+mmq$, équation

par laquelle x se détermine facilement. Voilà donc le quatrieme cas dans lequel notre formule peut se transformer en un carré; l'application en est aisée, & nous allons l'éclaircir par quelques exemples.

§ 5.

Troisieme question. On cherche des nombres x , tels que leurs carrés, pris deux fois, soient de 1 plus grands que d'autres carrés, ou bien que si on retranche l'unité d'un de ces doubles carrés, il reste un carré; ainsi que le cas a lieu pour le nombre 5, dont le carré 25, pris deux fois, donne le nombre 50, qui est de 1 plus grand que le carré 49.

Il faut, d'après cet énoncé, que $2xx-1$ soit un carré; & comme nous avons, suivant notre formule, $a=-1$, $b=0$ & $c=2$, on voit que ni a ni c n'est un carré, & que de plus la quantité proposée ne peut être décomposée en deux facteurs, puisque $bb-4ac=8$ n'est pas non plus un carré; de sorte qu'aucun des trois premiers

cas n'a lieu. Mais, suivant le quatrième ; cette formule peut être représentée par $xx + (xx - 1) = xx + (x - 1)(x + 1)$. Si donc on en suppose la racine $= x + \frac{m(x+1)}{n}$, on aura $xx + (x + 1)(x - 1) = xx + \frac{2mx(x+1)}{n} + \frac{m^2(x+1)^2}{nn}$; cette équation , après avoir effacé les xx & divisé les autres termes par $x + 1$, donne $nnx - nn = 2mnx + mm$, d'où l'on tire $x = \frac{mm + nn}{nn - 2mn - mm}$; & puis-
 qué dans notre formule $2xx - 1$, le carré xx se trouve seul, il est indifférent qu'on trouve pour x des valeurs positives ou négatives. On peut d'abord même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir $x = \frac{mm + nn}{nn + 2mn - mm}$.

Si on fait ici $m = 1$ & $n = 1$, on trouve $x = 1$ & $2xx - 1 = 1$; que si on fait $m = 1$ & $n = 2$, on trouve $x = \frac{5}{7}$ & $2xx - 1 = \frac{1}{49}$; enfin, si on suppose $m = 1$ & $n = -2$, on trouveroit $x = -\frac{1}{5}$, ou $x = +\frac{1}{5}$, & $2xx - 1 = \frac{1}{25}$.

56.

Quatrième question. Trouver des nombres dont les carrés doublés & augmentés de 2, soient pareillement des carrés. Un tel nombre, par exemple, est 7, le double de son carré est 98, & si on y ajoute 2, on a le carré 100.

Il faut donc que $2xx + 2$ soit un carré, & comme $a = 2$, $b = 0$ & $c = 2$; de sorte que ni a ni c , ni $bb - 4ac$ ou -16 , ne sont des carrés, il faudra recourir à la quatrième règle.

Supposons la première partie $= 4$, la seconde sera $2xx - 2 = 2(x + 1)(x - 1)$, ce qui donne à la quantité proposée la forme $4 + 2(x + 1)(x - 1)$.

Que $2 + \frac{m(x+1)}{n}$ en soit la racine, nous aurons l'équation $4 + 2(x + 1)(x - 1) = 4 + \frac{4m^2(x+1)^2}{nn} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$, où les 4 se retranchent, de façon qu'après avoir divisé les autres termes par $x + 1$, on a $2nnx - 2nn = 4mn + mmx + mm$, & par conséquent $x = \frac{4nn + mm + 2nn}{2nn - mm}$.

Si on fait dans cette valeur $m=1$ & $n=1$, on trouve $x=7$, & $2xx+2=100$. Mais si $m=0$ & $n=1$, on a $x=1$ & $2xx+2=4$.

57.

Il arrive souvent aussi que, lorsqu'aucune des trois premières règles n'a lieu, on ne peut trouver comment la formule peut se décomposer en deux parties telles que la quatrième règle les demande.

Par exemple, s'il est question de la formule $7+15x+13xx$, la décomposition dont nous parlons est à la vérité possible, mais la façon de la faire ne se présente pas d'abord à l'esprit; elle exige qu'on suppose la première partie $=(1-x)^2$ ou $1-2x+xx$, de façon que l'autre est $=6+17x+12xx$; & on reconnoît que cette partie a des facteurs, parce que $17^2-4.6.12$ étant $=1$, est un carré. En effet les deux facteurs sont $(2+3x)(3+4x)$; de sorte que la formule devient $(1-x)^2+(2+3x)(3+4x)$, & qu'on peut maintenant la résoudre par la quatrième règle.

Mais, ainsi que nous l'avons insinué, on ne doit pas prétendre que cette décomposition se trouve sur le champ; c'est pour quoi nous indiquerons encore une voie générale, pour reconnoître préalablement si la résolution d'une telle formule est possible ou non; car il y en a une infinité qui ne peuvent se résoudre du tout: telle est, par exemple, la formule $3xx+2$, qui ne peut en aucun cas devenir un carré. D'un autre côté il suffit de connoître un seul cas où une formule est possible, pour en trouver ensuite facilement toutes les solutions; c'est sur quoi nous allons entrer dans quelque détail.

58.

On remarquera, d'après ce que nous venons de dire, que tout l'avantage qu'on peut se promettre dans ces occasions, c'est de déterminer ou de deviner, pour ainsi dire, quelque cas dans lequel une formule telle que $a+bx+cx^2$, se transforme en un carré; & la voie qui se présente na-

E iv

tuellement pour cela, est de supposer successivement pour x de petits nombres, jusqu'à ce qu'on rencontre un cas qui donne un carré.

Or, comme x peut être un nombre romain, qu'on commence par substituer en général à x une fraction telle que $\frac{a}{u}$, & si la formule $a + \frac{bx}{u} + \frac{cx^2}{u^2}$ qui en résulte, est un carré, elle le sera pareillement après avoir été multipliée par u^2 , de sorte qu'il ne restera qu'à tâcher de trouver pour i & pour u des valeurs en nombres entiers, telles que la formule $qu^2 + bu + cu$ soit un carré. Il est évident qu'après cela la supposition de $x = \frac{a}{u}$ ne peut manquer de faire trouver la formule $u^2 - bx + cx^2$ égale à un carré.

Si enfin, quoi qu'on fasse, on ne parvient à aucun cas satisfaisant, on a tout lieu de soupçonner qu'il est tout-à-fait impossible de transformer la formule en un carré, ce qui, comme nous l'avons dit, arrive très-fréquemment,

59.

Présentement nous ferons voir que, lorsqu'au contraire on a déterminé un cas satisfaisant, il est facile de trouver tous les autres cas qui donnent pareillement un carré; on verra en même temps que le nombre de ces solutions est toujours infiniment grand.

Considérons d'abord la formule $z + 7xx$, où $a = z$, $b = 0$ & $c = 7$, elle devient évidemment un carré, si l'on suppose $x = 1$; qu'on fasse donc $x = 1 + y$, on aura $xx = 1 + 2y + yy$, & notre formule devient $9 + 14y + 7yy$, où le premier terme est un carré; ainsi nous supposerons, conformément à la seconde règle, la racine carrée de la nouvelle formule $= 3 + \frac{my}{n}$, & nous aurons l'équation $9 + 14y + 7yy = 9 + \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$, où nous pouvons effacer 9 de part & d'autre, & diviser par y ; cela fait, nous aurons $14n + 7ny = \frac{6mn}{n} + \frac{m^2y}{n}$, donc $y = \frac{6mn - 14n^2}{7n - mn}$, & conséquem-

ment $x = \frac{6mn - 7nn - m^2}{7nn - mm}$, où l'on peut adopter pour m & n telles valeurs qu'on veut.

Si on fait $m = 1$ & $n = 1$, on a $x = -\frac{1}{3}$; ou bien aussi, puisque la seconde puissance de x est seule, $x = +\frac{1}{3}$, donc $2 + 7xx = \frac{25}{9}$.

Si $m = 3$ & $n = 1$, on a $x = -1$, ou $x = +1$.

Mais si $m = 3$ & $n = -1$, on a $x = 17$; ce qui donne $2 + 7xx = 2025$, le carré de 45.

Supposons aussi $m = 8$ & $n = 3$, nous aurons de même $x = -17$ ou $x = +17$.

Mais en faisant $m = 8$ & $n = -3$, on trouve $x = 271$, de sorte que $2 + 7xx = 51409 = 717^2$.

60.

Examinons à présent la formule $5xy + 3x + 7$, qui devient un carré par la supposition de $x = -1$. Si nous faisons par cette raison $x = y - 1$, notre formule se change en celle-ci:

$$\begin{array}{r} 5xy - 10y + 5 \\ + 3y - 3 \\ + 7 \end{array}$$

$$5xy - 7y + 9,$$

dont nous supposons la racine carrée $= 3 - \frac{xy}{a}$; moyennant cela nous aurons

$$5xy - 7y + 9 = 9 - \frac{6xy}{a} + \frac{m^2xy}{a^2}, \text{ ou } 5nxy - 7nn = -6nn + mmy; \text{ d'où nous tirons}$$

$$y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mn}, \text{ \& enfin } x = \frac{2nn - 6nn - mn}{5nn - mn}.$$

Soit $m = 2$ & $n = 1$, on a $x = -6$, & par conséquent $5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2$.

Mais si $m = -2$ & $n = 1$, on trouve $x = 18$, & $5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2$.

61.

Considérons maintenant cette autre formule $7xx + 15x + 13$, où nous ne pouvons que commencer par la supposition de $x = \frac{u}{a}$; ayant substitué & multiplié par uu , nous avons la formule $7u + 15u + 13uu$, qui doit être un carré. Essayons donc de prendre quelques petits nombres pour les valeurs de a & de u .

Soit $m=1$ & $n=1$, la formule deviendra $= 3y$
 $m=2$ & $n=1$, ————— $= 7y$
 $m=2$ & $n=-1$, ————— $= 11$
 $m=3$ & $n=1$, ————— $= 121$.

Or 121 étant un carré, c'est signe que la valeur de $x=3$ satisfait; supposons donc $x=y+3$, & nous aurons, en substituant dans la formule, $7yy+42y+63+15y+45+13$, ou $7yy+57y+121$. Soit la racine $=11+\frac{my}{n}$, nous aurons $7yy+57y+121=121+\frac{22y}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$, ou $7nny+57nn=22mn+\frac{m^2y^2}{n}$; donc $y=\frac{57nn-22mn}{mn-7n^2}$, & $x=\frac{56nn-22mn-3mn}{mn-7n^2}$.

Soit, par exemple, $m=3$ & $n=1$, on trouve $x=-\frac{1}{2}$, & la formule devient $7xx+15x+13=\frac{2}{4}=(\frac{1}{2})^2$.

Soit $m=1$ & $n=-1$, on trouve $x=\frac{17}{6}$; si $m=3$ & $n=-1$, on a $x=\frac{129}{2}$, & la formule $7xx+15x+13=\frac{320499}{4}=(\frac{317}{2})^2$.

62.

Mais souvent on perd sa peine à chercher un cas où la formule proposée puisse

devenir un carré. Nous avons déjà dit que $3xx+2$ est une de ces formules intraitables, & on verra, en lui donnant d'après la règle la forme $3u+2u$, qu'en effet, quelques valeurs que l'on donne à u & à x , cette quantité ne devient jamais un nombre carré. Et comme les formules de cette espèce sont en très-grand nombre, il vaudra la peine d'indiquer quelques caractères auxquels on puisse reconnoître leur impossibilité, afin qu'on soit souvent dispensé par-là d'un tâtonnement inutile: c'est à quoi nous destinons le Chapitre suivant.

CHAPITRE V.

Des cas où la formule $a+bx+cx^2$ ne peut jamais devenir un carré.

63.

COMME notre formule générale est de trois termes, nous observerons d'abord qu'elle peut toujours être transformée en

une autre, dans laquelle le terme moyen manque. Cela se fait en supposant $x = \frac{y-b}{ac}$; cette substitution change notre formule en celle-ci, $a + \frac{by-bb}{ac} + \frac{yy-2by+bb}{4c}$, ou $\frac{4ac-bb+yy}{4c}$; & puisqu'elle doit être un carré, qu'on la fasse $= \frac{z}{4}$, on aura $4ac-bb+yy=czz$; & par conséquent $yy=czz+bb-4ac$. Lors donc que notre formule sera un carré, cette dernière $czz+bb-4ac$ le sera pareillement; & réciproquement, si celle-ci est un carré, la proposée le sera de même. Par conséquent, si on écrit z à la place de $bb-4ac$, tout reviendra à déterminer si une quantité de la forme $czz+z$ peut devenir un carré ou non. Et comme cette formule ne consiste qu'en deux termes, il est certainement beaucoup plus facile par-là de juger si elle est possible ou si elle ne l'est pas; c'est au reste la nature des nombres donnés c & z , qui doit nous guider dans cette recherche.

64.

Il est clair que si $z=0$, la formule czz ne peut devenir un carré que dans le cas où c est un carré; car le quotient de la division d'un carré par un autre carré étant pareillement un carré, la quantité czz ne peut être un carré, à moins que $\frac{c}{z}$, c'est-à-dire c , n'en soit un. Ainsi quand c n'est pas un carré, la formule czz ne peut en aucune manière devenir un carré; & au contraire, si c est par soi-même un carré, czz fera de même un carré, quel que nombre que l'on adopte pour z .

65.

Si nous voulons porter un jugement sur d'autres cas, il nous faudra recourir à ce que nous avons dit plus haut au sujet des différentes espèces de nombres considérés relativement à leur division par d'autres nombres.

Nous avons vu, par exemple, que le diviseur 3 donne lieu à trois espèces dif-

férentes de nombres : la première comprend les nombres qui sont divisibles par 3, & qu'on peut exprimer par la formule $3n$.

La seconde espèce comprend les nombres qui, divisés par 3, laissent 1 de reste, & qui sont contenus dans la formule $3n+1$.

A la troisième espèce appartiennent les nombres, où le résidu de la division par 3 est 2, & qui se représentent par l'expression générale $3n+2$.

Or, puisque tous les nombres sont contenus dans ces trois formules, considérons en les carrés. D'abord, s'il s'agit d'un nombre qui soit compris dans la formule $3n$, nous voyons que le carré de cette quantité étant $9nn$, il est divisible non-seulement par 3, mais aussi par 9.

Que si le nombre donné est compris dans la formule $3n+1$, on a le carré $9nn+6n+1$, qui, divisé par 3, donne $3nn+2n$ avec le résidu 1, & qui par conséquent appartient de même à la seconde espèce $3n+1$.

Enfin, si le nombre en question est compris

compris dans la formule $3n+2$, on a à considérer le carré $9nn+12n+4$; si on le divise par 3, on trouve $3nn+4n+1$ & 1 de reste; de sorte que ce carré appartient, ainsi que le précédent, à l'espèce $3n+1$.

Il est clair par-là que les nombres carrés en général ne sont que de deux espèces relativement au diviseur 3; car, ou ils sont divisibles par 3, & dans ce cas ils sont nécessairement aussi divisibles par 9; ou bien ils ne sont point divisibles par 3, & dans ce cas il y aura toujours 1 de résidu & jamais 2. Par cette raison aucun nombre contenu dans la formule $3n+2$, ne peut être un carré.

66.

Il nous est facile, au moyen de ce que nous venons de dire, de faire voir que la formule $3xx+2$ ne peut jamais devenir un carré, quelque nombre entier ou fractionnaire qu'on veuille substituer à x . Car si x est un nombre entier, & qu'on divise

la formule $3xx + 2$ par 3, il reste 2; donc elle ne peut être un carré. Ensuite si x est une fraction, nous l'exprimerons par $\frac{p}{q}$, & nous supposons qu'elle est déjà réduite à ses moindres termes, & que p & q n'ont d'autre commun diviseur que 1. Afin donc que $\frac{2p^2}{3q^2} + 2$ fût un carré, il faudroit, en multipliant par $3q^2$, que $2p^2 + 6q^2$ fût de même un carré; or c'est ce qui ne se peut: car remarquons que le nombre u est divisible par 3, ou qu'il ne l'est pas; s'il l'est, u ne le sera pas, parce que 2 & 3 n'ont pas de commun diviseur; c'est pourquoy, si on fait $u = 3f$, comme la formule devient $3u + 18ff$, on voit bien qu'on ne peut la diviser par 3, qu'une fois & pas davantage, comme il faudroit pouvoir le faire si elle étoit un carré; en effet, en divisant d'abord par 3, on a $u + 6ff$. Or si d'un côté $6ff$ est divisible par 3, de l'autre u étant divisé par 3, laisse 1 de reste. Supposons à présent que u ne soit pas divisible par 3, & voyons ce qui reste. Puisque le premier terme est divisible par 3,

il s'agira uniquement de savoir quel résidu donne le second terme $2uu$. Or u étant divisé par 3, donne le reste 1, c'est-à-dire que c'est un nombre de l'espèce $3n + 1$; ainsi $2uu$ est un nombre de l'espèce $6n + 2$, & en le divisant par 3 il laisse 2 de reste; par conséquent notre formule $3u + 2uu$, si on la divise par 3, donne le résidu 2, & n'est certainement pas un nombre carré.

67.

On peut démontrer de la même manière, que pareillement la formule $3u + 5uu$ ne peut jamais être un carré, ni même aucune des formules suivantes: $3u + 8uu$, $3u + 11uu$, $3u + 14uu$, où les nombres 5, 8, 11, 14 &c. divisés par 3, donnent 2 pour résidu. Car si l'on suppose que u soit divisible par 3, & que par conséquent u ne le soit pas, & qu'on fasse $u = 3f$, on parviendra toujours à des formules divisibles par 3, mais non pas divisibles par 9. Et si u n'est pas divisible par 3, & par conséquent que u soit un nombre de l'espèce

$3n+1$, on auroit le premier terme, $3n+1$, divisible par 3, tandis que les seconds, $5uu$, $8uu$, $11uu$ &c. auroient les formes $15n+5$, $24n+8$, $33n+11$ &c. & laisseroient constamment 2 de reste, quand on les diviserait par 3.

68.

Il est évident que cette remarque s'étend même jusqu'à la formule générale $3n+1+(3n+2).uu$, laquelle en effet ne peut jamais devenir un carré, & pas même en prenant pour n des nombres négatifs. Si on vouloit, par exemple, faire $n=-1$, je dis qu'il est impossible que la formule $3n+1$ puisse devenir un carré; la chose est claire, si n est divisible par 3; & si cela n'est pas, comme dans ce cas uu est un nombre de l'espèce $3n+1$, notre formule devient $3n-3n-1$, ce qui, étant divisé par 3, donne le résidu -1 ou $+2$, en augmentant de 3. En général que n soit $=-m$, on aura la formule $3n+1-(3m-2)uu$, qui ne peut jamais devenir un carré.

69.

Voilà jusqu'où nous conduit la considération du diviseur 3; si nous regardons maintenant aussi 4 comme un diviseur, nous voyons qu'un nombre quelconque est toujours compris dans une des quatre formules suivantes:

I.) $4n$, II.) $4n+1$, III.) $4n+2$, IV.) $4n+3$.

Le carré de la première espèce de ces nombres est $16nn$, & il est par conséquent divisible par 16.

Celui de la seconde espèce $4n+1$ est $16nn+8n+1$; ainsi en le divisant par 8, il donne 1 de reste; de sorte qu'il appartient à la formule $8n+1$.

Le carré de la troisième espèce, $4n+2$, est $16nn+16n+4$; si on divise par 16, il reste 4; donc ce carré est compris dans la formule $16n+4$. Enfin le carré de la quatrième espèce $4n+3$, étant $16nn+24n+9$, on voit qu'en divisant par 8 il reste 1.

70.

Nous apprenons par-là, en premier lieu, que tous les nombres quarrés pairs sont ou de la forme $16n$, ou de celle-ci $16n + 4$; & conséquemment que toutes les autres formules paires, savoir $16n + 2$, $16n + 6$, $16n + 8$, $16n + 10$, $16n + 12$, $16n + 14$, ne peuvent jamais devenir des nombres quarrés.

Ensuite, que tous les quarrés impairs sont contenus dans la seule formule $8n + 1$; c'est-à-dire que si on les divise par 8, ils laissent 1 de résidu. Et il suit de-là que tous les autres nombres impairs, qui auront la forme ou de $8n + 3$, ou de $8n + 5$, ou de $8n + 7$, ne pourront jamais être des quarrés.

71.

Ces principes fournissent une nouvelle preuve que la formule $3u + 2uu$ ne peut être un quarré. Car, ou les deux nombres u & u sont impairs, ou l'un est pair & l'autre

est impair. Ils ne peuvent être pairs: l'un & l'autre, parce que si cela étoit, ils auroient au moins le commun diviseur 2. Dans le premier cas donc, où tant u que uu sont compris dans la formule $8n + 1$, le premier terme $3u$ étant divisé par 8, laisseroit le résidu 3, & l'autre terme $2uu$, laisseroit 2; ainsi le résidu total seroit 5; ainsi la formule en question ne peut être un quarré. Mais si le second cas a lieu, & que u soit pair & u impair, le premier terme $3u$ sera divisible par 4, & le second terme $2uu$, si on le divise par 4, laissera 2 de reste; ainsi les deux termes ensemble, divisés par 4, laissent 2 de reste, & ne peuvent par conséquent former un quarré. Enfin, si on vouloit supposer u un nombre pair $= 2f$, & u impair, de sorte que $u = 8n + 1$, notre formule se changeroit en celle-ci, $24n + 3 + 8ff$, qui, divisée par 8, laisse 3, & ne peut donc être un quarré.

Cette démonstration s'étend aussi à la formule $3u + (8n + 2)uu$, pareillement à celle-ci, $(8m + 3)u + 2uu$, & même aussi

F iv

à celle-ci, $(8m+3)u+(8n+2)uu$, où l'on peut substituer à m & à n tous les nombres entiers tant positifs que négatifs.

72.

Mais allons plus loin & considérons le diviseur 5, à l'égard duquel tous les nombres se rangent en cinq classes:

I.) $5n$, II.) $5n+1$, III.) $5n+2$, IV.) $5n+3$, V.) $5n+4$.

Nous remarquerons d'abord que si un nombre est de la première espèce, son carré aura la forme $25nn$, & sera par conséquent divisible non-seulement par 5, mais aussi par 25.

Tout nombre de la seconde classe aura un carré de la forme $25nn+10n+1$, & comme la division par 5 donne le résidu 1, ce carré sera compris dans la formule $5n+1$.

Les nombres de la troisième espèce auront le carré $25nn+20n+4$, qui, divisé par 5, donne 4 de reste.

Le carré d'un nombre de la quatrième

espèce est $25nn+30n+9$; si on le divise par 5, il reste 4.

Enfin le carré d'un nombre de la cinquième classe est $25nn+40n+16$; qu'on divise ce carré par 5, il restera 1.

Lors donc qu'un nombre carré ne peut être divisé par 5, le résidu de la division sera toujours 1 ou 4, & jamais 2 ou 3; & il s'ensuit qu'aucun carré ne peut être contenu dans les formules $5n+2$ & $5n+3$.

73.

Nous partons de-là pour prouver que ni la formule $5u+2uu$, ni celle-ci, $5u+3uu$, ne peuvent être des carrés. Car, ou bien u est divisible par 5; ou il ne l'est pas; dans le premier cas ces formules seront divisibles par 5; mais elles ne le seront pas par 25; donc elles ne pourront être des carrés. Si, au contraire, u n'est pas divisible par 5, uu sera ou $5n+1$, ou $5n+4$; & dans le premier de ces cas la première formule se change en celle-ci, $5u+10n+2$, qui, divisée par 5, laisse 2 de

reste, & la seconde formule devient $5u + 15n + 3$, ce qui étant divisé par 5, donne 3 de reste, de sorte que ni l'une ni l'autre ne peuvent être un carré; quant au cas de $u = 5n + 4$, la première formule devient $5u + 10n + 8$, ce qui, divisé par 5, laisse 3; & l'autre devient $5u + 15n + 12$, ce qui, divisé par 5, laisse 2; ainsi dans ce cas les deux formules ne peuvent pas non plus être des carrés.

On observera par un raisonnement semblable que ni la formule $3u + (5n + 2)u$, ni cette autre, $5u + (5n + 3)u$, ne peuvent devenir des carrés, puisqu'on parvient aux mêmes résidus que nous venons de trouver. On pourroit même écrire dans le premier terme $5mu$ au lieu de $5u$, pourvu que m ne soit pas divisible par 5.

74.

De ce que tous les carrés pairs sont compris dans la formule $4n$, & tous les carrés impairs dans la formule $4n + 1$, & que par conséquent ni $4n + 2$, ni $4n + 3$,

ne peuvent devenir des carrés, il s'ensuit que la formule générale $(4m + 3)u + (4n + 3)uu$ ne peut jamais être un carré. Car supposons que u soit pair, n pourra être divisé par 4; & l'autre terme étant divisé par 4, donnera 3 de reste; & si nous supposons les deux nombres u & n impairs, les restes de u & de uu seront 1, & par conséquent le résidu de la formule entière sera 2; or il n'est aucun nombre carré qui, divisé par 4, laisse 2 de reste.

Nous remarquerons aussi que tant m que n peuvent même être pris négativement, ou $= 0$, & qu'il s'ensuit que les formules $3u + 3uu$ & $3u - uu$ ne peuvent pas non plus se transformer en des carrés.

75.

De même que nous avons trouvé pour un petit nombre de diviseurs, que quelques espèces de nombres ne peuvent jamais devenir des carrés, on pourroit déterminer de pareilles espèces de nombres pour tous les autres diviseurs.

Qu'il s'agisse du diviseur 7, on aura à distinguer sept différentes especes de nombres, dont nous examinerons aussi les quarrés.

Especes des Nombres,	Leurs Quarrés sont de l'espece,		
I. $7n$	$49nn$	$7n$	
II. $7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$	
III. $7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$	
IV. $7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$	
V. $7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$	
VI. $7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$	
VII. $7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$	

Puis donc que les quarrés qui ne sont pas divisibles par 7, sont tous contenus dans les trois formules $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, il est clair que les trois autres formules, $7n+3$, $7n+5$ & $7n+6$, ne s'accordent pas avec la nature des nombres quarrés.

76.

Pour entrer encore mieux dans le sens de cette conclusion, on remarquera que

la dernière especie, $7n+6$, peut aussi s'exprimer par $7n-1$; que pareillement, la formule $7n+5$ est la même que $7n-2$, & $7n+4$, la même que $7n-3$. Car, cela posé, il est évident que les quarrés des deux especes, $7n+1$ & $7n-1$, si on les divise par 7, donneront le même résidu 1; & que les quarrés des deux especes, $7n+2$ & $7n-2$, doivent se ressembler de la même maniere.

77.

En général donc, quel que soit le diviseur, que nous indiquerons par la lettre d , les différentes especes de nombres qui en résultent, sont

 dn ; $dn+1$, $dn+2$, $dn+3$, &c. $dn-1$, $dn-2$, $dn-3$, &c.

où les quarrés de $dn+1$ & $dn-1$ ont cela de commun, qu'étant divisés par d , ils laissent le reste 1, de sorte qu'ils appartiennent à la même formule $dn+1$; de même les quarrés des deux especes $dn+2$

& $dn-2$, appartiennent à la même formule $dn+4$. De façon qu'on peut conclure en général, que les quarrés des deux espèces, $dn+1$ & $dn+a$, étant divisés par d , donnent un même résidu aa , ou celui qui reste, en divisant aa par d .

78.

Ces remarques suffisent pour indiquer une infinité de formules, telles que $an+bu$, qui ne peuvent en aucune manière devenir des quarrés. C'est ainsi que le diviseur 7 donne facilement à connaître qu'aucune de ces trois formules, $7n+3u$, $7n+5u$, $7n+6u$, ne peut devenir un quarré, parce que la division de u par 7 ne donne pour résidu que 1, ou 2 ou 4; & que dans la première de ces formules il reste ou 3, ou 6 ou 5, dans la seconde, 5, 3 & 6, & dans la troisième, 6, ou 5 ou 3, &c qui ne peut avoir lieu dans des quarrés. Lors donc qu'on rencontre de pareilles formules, on est sûr qu'on feroit des efforts inutiles en cherchant à deviner quelque cas où elles deviendroient

des quarrés, & c'est pourquoi les considérations dans lesquelles nous venons d'entrer, ne laissent pas d'être importantes.

Si, au contraire, une formule proposée n'est pas de cette nature, nous avons vu dans le Chapitre précédent qu'il suffit de trouver un seul cas où elle devient un quarré, pour être en état de déduire de ce cas une infinité d'autres cas pareils.

La formule proposée étoit proprement $ax+b$, & comme on trouve ordinairement pour x des fractions, nous avons supposé $x=\frac{1}{5}$; en sorte qu'il s'agissoit de transformer en un quarré la formule $ax+b$.

Mais il ne laisse pas d'y avoir souvent une infinité de cas où x peut même être assigné en nombres entiers, & c'est de la détermination de ces cas que nous nous occuperons dans le Chapitre suivant.



CHAPITRE VI.

Des Cas en nombres entiers, où la formule
 $axx + b$ *devient un carré.*

79.

Nous avons déjà fait voir plus haut comment on doit transformer des formules telles que $a + bx + cxx$, si on veut en retrancher le second terme; ainsi nous n'étendrons qu'à la formule $axx + b$ les recherches présentes, où il s'agira de trouver pour x uniquement des nombres entiers, qui puissent transformer cette formule en un carré. Or il faut, ayant toutes choses, qu'une telle formule soit possible; car si elle ne l'est pas, on ne trouvera pas même pour x des valeurs fractionnaires, bien loin de pouvoir trouver des nombres entiers.

80.

Qu'on suppose donc $axx + b = yy$, où
 a & b sont des nombres entiers, & où x
 &

& y doivent être de même des nombres entiers.

Or il est absolument nécessaire ici qu'on sache, ou qu'on ait déjà trouvé un cas en nombres entiers, sans quoi ce seroit une peine perdue de chercher d'autres cas semblables, puisqu'il se pourroit que la formule fût impossible.

Ainsi nous supposerons que cette formule devienne un carré, si l'on fait $x = f$, & nous indiquerons ce carré par gg , en sorte que $aff + b = gg$, où f & g sont des nombres connus. Tout se réduit donc à déduire de ce cas d'autres cas semblables; & cette recherche est d'autant plus importante, qu'elle est sujette à des difficultés considérables que nous viendrons cependant à bout de surmonter par les artifices qu'on verra.

81.

Puisqu'on a déjà trouvé $aff + b = gg$, & que d'ailleurs il faut aussi que $axx + b = yy$, soustrayons la première équation de la se-

Tome II.

G

conde, & nous en aurons une nouvelle ;
 $axx - aff = yy - gg$, qui peut se représen-
 ter par des facteurs de la manière sui-
 vante, $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$,
 & qui en multipliant de plus les deux mem-
 bres par pg , devient $apq(x+f)(x-f)$
 $= pq(y+g)(y-g)$. Si nous décomposons
 maintenant cette équation, en faisant
 $ap(x+f) = q(y+g)$, & $q(x-f) = p(y-g)$, nous pourrions tirer de ces
 deux équations des valeurs des deux lettres
 x & y . La première, divisée par q , donne
 $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; la seconde, divisée par p ,
 donne $y - g = \frac{qx - gf}{p}$; soustrayant cette der-
 nière égalité de l'autre, on a $2g$
 $= \frac{(app - qg)x + (app + qg)f}{pq}$, ou $2pgg = (app - qg)x$
 $+ (app + qg)f$, donc $x = \frac{2pgg}{app - qg} - \frac{(app + qg)f}{app - qg}$,
 & par-là on obtient $y = g + \frac{2gfg}{app - qg}$
 $- \frac{(app + qg)f}{app - qg}$. Et comme dans cette der-
 nière valeur les deux premiers termes,
 contenant tous deux la lettre g , peuvent
 être mis sous la forme $\frac{g(app + qg)}{app - qg}$, & que les
 deux autres termes, contenant la lettre f ,

peuvent s'exprimer par $-\frac{2gfg}{app - qg}$, tous les
 termes seront réduits à la même dénomi-
 nation, & on aura $y = \frac{g(app + qg) - 2gfg}{app - qg}$.

82.

Ce procédé semble d'abord ne point con-
 venir à notre but, puisque devant trouver
 pour x & pour y des nombres entiers, nous
 sommes parvenus à des résultats fraction-
 naires, & qu'il s'agiroit de traiter cette
 nouvelle question, quels nombres on peut
 substituer à p & à q pour que les fractions
 disparaissent ? question qui paroît plus dif-
 ficile encore que notre question principale.
 Mais on peut employer ici un artifice par-
 ticulier, qui nous fera parvenir facilement
 au but ; nous allons l'expliquer :

Comme tout doit être exprimé en nom-
 bres entiers, faisons $\frac{app + qg}{app - qg} = m$, & $\frac{2gfg}{app - qg} = n$, pour avoir $ng - mf$, & $y = mg - naf$.

Or nous ne pouvons pas prendre ici m &
 n à volonté, puisque ces lettres doivent se
 déterminer de façon à répondre aux déter-

minations précédentes; ainsi nous considérerons pour cet effet leurs quarrés, & nous verrons que $mm = \frac{aap^2 + 2appqq + q^4}{aap^2 - 2appqq + q^4}$

& $nn = \frac{4ppqq}{aap^2 - 2appqq + q^4}$, & que par conséquent $mm - nn$

$$= \frac{aap^2 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^2 - 2appqq + q^4}$$

$$= \frac{aap^2 - 2appqq + q^4}{aap^2 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83.

On voit par-là que les deux nombres m & n doivent être tels que $mm = ann + 1$. Ainsi, comme a est un nombre connu, il faudra commencer par songer aux moyens de déterminer pour n un nombre entier, tel que $ann + 1$ devienne un quarré; car après cela m sera la racine de ce quarré; & quand on aura déterminé pareillement le nombre f , de maniere que $aff + b$ devienne un quarré, savoir gg , on aura pour x & pour y les valeurs suivantes en nombres

entiers, $x = ng - mf$ & $y = mg - naf$, & enfin par-là $axx + b = yy$.

84.

Il est évident qu'ayant une fois trouvé m & n , on peut écrire à leur place $-m$ & $-n$, parce que le quarré nn ne laisse pas de rester le même.

Mais nous avons fait entendre que pour trouver x & y en nombres entiers, de maniere que $axx + b = yy$, il falloit d'abord connoître un cas, tel que $aff + b = gg$; lors donc qu'on aura trouvé un semblable cas, il faudra tâcher encore de connoître, outre le nombre a , des valeurs de m & de n , telles que $ann + 1 = mm$, & nous en donnerons la méthode dans la suite. Quand enfin tout cela sera fait, on aura un nouveau cas, savoir $x = ng + mf$, & $y = mg + naf$, & après cela $axx + b = yy$.

Mettant ensuite ce nouveau cas à la place du précédent, qu'on avoit regardé comme connu; c'est-à-dire, écrivant $ng + mf$ au lieu de f , & $mg + naf$ au lieu de g ,

on aura pour x & y de nouvelles valeurs ; par lesquelles, si on les substitue à x & à y , on en trouve ensuite d'autres nouvelles, & ainsi de suite aussi loin qu'on voudra ; de sorte qu'au moyen d'un seul cas qu'on connoissoit d'abord, on en détermine après cela une infinité d'autres.

85.

La maniere dont nous sommes parvenus à cette solution étoit assez embarrassée, & paroissoit d'abord nous éloigner de notre but, puisqu'elle nous avoit conduits à des fractions compliquées qu'un hasard favorable a seul pu réduire ; il fera donc à propos d'indiquer une voie plus courte, qui conduit à la même solution.

86.

Puisqu'il faut que $axx + b = yy$, & que l'on a déjà trouvé $aff + b = gg$, la première équation nous donne $b = yy - axx$, & la seconde donne $b = gg - aff$; par conséquent il faut aussi que $yy - axx = gg - aff$, & tout se réduit maintenant à déterminer

les inconnues x & y par le moyen des quantités connues f & g . On voit que pour cet effet on pourroit faire simplement $x = f$ & $y = g$; mais on voit aussi que cette supposition ne fourniroit pas un nouveau cas outre celui qu'on connoissoit d'avance.

Ainsi nous supposons qu'on ait déjà trouvé pour n un nombre tel que $ann + 1$ soit un carré, ou bien que $ann + 1 = mm$; cela posé, nous avons $nm - ann = 1$; & en multipliant par cette équation la dernière que nous avons ci-dessus, nous trouvons aussi que $yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggm - affnm - ag^n n + affnn$. Supposons à présent $y = gm + afn$, nous aurons $ggm + 2afgm + affnn - axx = ggm - affnm - ag^n n + affnn$, où les termes ggm & $affnn$ se détruisent ; de sorte qu'il reste $axx = affnm + ag^n n + 2afgm$, ou $xx = fmm + ggn + 2fgm$; or cette formule est évidemment un carré, & donne $x = fm + gn$; ainsi nous avons trouvé pour x & y les mêmes formules que ci-dessus.

G iv

87.

Il sera nécessaire maintenant de rendre cette solution plus claire, en l'appliquant à quelques exemples.

Première question. Trouver pour x toutes les valeurs en nombres entiers, telles que $2xx-1$ devienne un carré, ou qu'on ait $2xx-1=yy$.

Nous avons ici $a=2$ & $b=1$, & il se présente aussi-tôt un cas satisfaisant, qui est celui où $x=1$ & $y=1$. Ce cas connu nous donne $f=1$ & $g=1$; or il s'agit de plus de déterminer une valeur de n , telle que $2nn-1$ devienne un carré mm ; & on voit d'abord aussi que ce cas a lieu quand $n=2$, & par conséquent $m=3$; ainsi chaque cas connu pour f & g nous donnant ces nouveaux cas $x=3f+2g$ & $y=3g+4f$, nous tirons de la première solution, $f=1$ & $g=1$; les nouvelles solutions suivantes:

$$\begin{array}{l|l} x=f=1 & 5 \mid 29 \mid 169 \\ y=g=1 & 7 \mid 41 \mid 239 \text{ \&c.} \end{array}$$

88.

Seconde question. Trouver tous les nombres triangulaires, qui sont en même temps des carrés.

Soit z la racine triangulaire, ce sera le triangle $\frac{z(z+1)}{2}$ qui devra être en même temps un carré; & si nous nommons x la racine de ce carré, il faudra que $\frac{z(z+1)}{2}=xx$. Multiplions par 8, nous aurons $4zz+4z=8xx$; & ajoutons encore 1 de chaque côté, pour avoir $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Ainsi la question est de faire en sorte que $8xx+1$ devienne un carré; car si l'on trouve $8xx+1=yy$, on aura $y=2z+1$, & conséquemment la racine triangulaire cherchée, $z=\frac{y-1}{2}$.

Or nous avons $a=8$ & $b=1$, & un cas satisfaisant saute aux yeux, savoir $f=0$ & $g=1$. On voit de plus que $8nn+1=mm$, en faisant $n=1$ & $m=3$; donc $x=3f+g$ & $y=3g+8f$; & puisque $z=\frac{y-1}{2}$, nous aurons les solutions suivantes:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x=f=0 & 1 & 6 & 35 & 204 & 1189 \\ y=g=1 & 3 & 17 & 99 & 577 & 3363 \\ z=\frac{y+1}{2}=0 & 1 & 8 & 49 & 288 & 1681 \text{ \&c.} \end{array}$$

89.

Troisième question. Trouver tous les nombres pentagones, qui sont en même temps des carrés.

Que la racine soit z , le pentagone sera $=\frac{5z^2-1}{2}$, que nous égalons au carré xx ; ainsi $3zz-z=2xx$; multipliant par 12, & ajoutant l'unité, nous avons $36zz-12z+1=24xx+1=(6z-1)^2$; & faisant $24xx+1=yy$, il faudra que $y=6z-1$, & $z=\frac{y+1}{6}$.

Puisqu'ici $a=24$ & $b=1$, on connoît le cas $f=0$ & $g=1$; & comme il faut que $24nn+1=mm$, on fera $n=1$, ce qui donne $m=5$; ainsi on aura $x=5f+g$ & $y=5g+24f$; & non-seulement $z=\frac{y+1}{6}$, mais aussi $z=\frac{1-y}{6}$, parce que l'on peut écrire $y=1-6z$; de-là résultent enfin les solutions suivantes:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x=f=0 & 1 & 10 & 99 & 980 \\ y=g=1 & 5 & 49 & 481 & 4801 \\ z=\frac{y+1}{6}=\frac{1}{3} & 1 & \frac{21}{3} & 81 & \frac{2401}{3} \\ \text{ou } z=\frac{1-y}{6}=0 & -\frac{2}{3} & -8 & -\frac{242}{3} & -800 \text{ \&c.} \end{array}$$

90.

Quatrième question. Trouver tous les carrés en nombres entiers, qui, pris sept fois & augmentés de 2, redeviennent des carrés.

On demande par conséquent que $7xx+2=yy$, où $a=7$ & $b=2$; & le cas connu tombe aussitôt sous les sens, c'est-à-dire $x=1$; de sorte que $x=f=1$, & $y=g=3$. Si l'on considère ensuite l'équation $7nn+1=mm$, on trouve facilement aussi que $n=3$ & $m=8$; donc $x=8f+3g$ & $y=8g+21f$, & on aura les solutions qui suivent:

$$\begin{array}{l|l|l} x=f=1 & 17 & 271 \\ y=g=3 & 45 & 717 \text{ \&c.} \end{array}$$

91.

Cinquième question. Trouver tous les nombres triangulaires, qui sont en même temps pentagones.

Que la racine du triangle soit $=p$ & celle du pentagone $=q$, il faudra que $\frac{p(p+1)}{2} = \frac{3q(3q-1)}{2}$, ou $3q^2 - q = pp + p$; qu'on cherche q , on aura d'abord $qq = \frac{1}{3}q + \frac{pp+p}{3}$, & de-là $q = \frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{pp+p}{3}}$, ou

$q = \frac{1 \pm \sqrt{12pp + 12p + 4}}{6}$. Par conséquent il s'agit de faire en sorte que $12pp + 12p + 4$ devienne un carré, & même en nombres entiers. Or comme il y a ici un terme moyen $12p$, on commencera par faire $p = \frac{x-1}{2}$, au moyen de quoi on aura $12pp = 3xx - 6x + 3$, & $12p = 6x - 6$, par conséquent $12pp + 12p + 4 = 3xx - 2$, c'est cette dernière quantité présentement qu'il est question de transformer en un carré.

Si donc on fait $3xx - 2 = yy$, on aura $p = \frac{x-1}{2}$, & $q = \frac{1+y}{6}$; ainsi tout dépend de la formule $3xx - 2 = yy$, & on a ici $a = 3$

& $b = -2$; de plus un cas connu $x = f = 1$ & $y = g = 1$; enfin dans l'équation $mm = 3nn + 1$, on a $n = 1$ & $m = 2$; donc on trouve tant pour x & y que pour p & q les valeurs suivantes:

D'abord $x = 2f + g$, & $y = 2g + 3f$, ensuite:

$x = f = 1$	3	11	41
$y = g = 1$	5	19	71
$p = 0$	1	5	20
$q = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{3}$
ou $q = 0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{15}{3}$

parce qu'on a aussi $q = \frac{1-y}{6}$.

92.

Jusqu'à présent, quand la formule proposée contenoit un second terme, nous étions obligés de le retrancher; mais on ne laisse pas de pouvoir appliquer la méthode que nous venons de donner, sans faire disparaître ce second terme; nous allons encore en expliquer la manière.

Soit $axx + bx + c$ la formule proposée

qui doit être un carré, ou $=yy$, & qu'on connoisse déjà le cas $aff+bf+c=gg$.

Si on soustrait cette équation de la première, on aura $a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg$, ce qu'on peut exprimer par des facteurs de cette façon: $(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g)$. Qu'on multiplie de part & d'autre par pq , on aura $pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g)$, & on décomposera cette équation en ces deux, I.) $p(x-f)=q(y-g)$, II.) $q(ax+af+b)=p(y+g)$. Multipliant maintenant la première par p & la seconde par q , & soustrayant le premier produit du second, on obtient $(aqg-pp)x+(aqg+pp)f+bqq=2gpq$, ce qui donne $x=\frac{2gpq}{aqg-pp}-\frac{(aqg+pp)f}{aqg-pp}$.

Mais la première équation est $q(y-g)=p(x-f)$, ainsi $y-g=\frac{2gpq}{aqg-pp}-\frac{2afq}{aqg-pp}-\frac{bfq}{aqg-pp}$, & par conséquent $y=g\left(\frac{2gpq}{aqg-pp}-\frac{2afq}{aqg-pp}-\frac{bfq}{aqg-pp}\right)$.

Il s'agit ici de chasser les fractions;

faisons pour cet effet, comme ci-devant, $\frac{aqg+pp}{aqg-pp}=m$, & $\frac{2gpq}{aqg-pp}=n$, & nous aurons $m+1=\frac{2afq}{aqg-pp}$, & $\frac{bfq}{aqg-pp}=\frac{m+1}{2}$; donc $x=ng-mf-\frac{b(m+1)}{2a}$, & $y=mg-naf-\frac{1}{2}bn$, où les lettres m & n doivent être telles, ainsi qu'auparavant, que $mm=ann+1$.

93.

Les formules que nous venons de trouver pour x & pour y , sont encore mêlées avec des fractions, puisqu'il y en a dans les termes qui renferment la lettre b ; & cela fait qu'elles ne répondent pas à notre but. Mais il faut remarquer que, si de ces valeurs on passe aux suivantes, on trouve constamment des nombres entiers, qu'à la vérité on eût trouvés beaucoup plus facilement par le moyen des nombres p & q que nous avons introduits dès le commencement. En effet, qu'on prenne p & q , de façon que $pp=aqq+1$, on aura $aqq=\frac{pp}{p}-1$, & les fractions disparaîtront. Car alors $x=-2gpq+f(aqq+pp)+bqq$, & $y=-g(aqq+pp)+2afpq+bpq$; mais

comme dans le cas connu $aff + bf + c = gg$, on ne rencontre que la seconde puissance de g , il est indifférent quel signe l'on donne à cette lettre; qu'on écrive donc $-g$ au lieu de $+g$, on aura les formules $x = 2gpq + f(aqq + pp) + bqq$, & $y = g(aqq + pp) + 2afpq + bpq$, & on sera assuré maintenant que $axx + bx + c = yy$.

Qu'on cherche, par exemple, les nombres hexagones, qui sont aussi des carrés.

Il faudra que $2xx - x = yy$, où $a = 2$, $b = -1$ & $c = 0$, & le cas connu sera évidemment $x = f = 1$ & $y = g = 1$.

De plus, pour que $pp = 2qq + 1$, il faut que $q = 2$ & $p = 3$; ainsi l'on aura $x = 12g + 17f = 4$, & $y = 17g + 24f = 6$, d'où résultent les valeurs qui suivent:

$$\begin{array}{l} x = f = 1 \quad | \quad 25 \quad 841. \\ y = g = 1 \quad | \quad 35 \quad 1189. \&c. \end{array}$$

94.

Arrêtons-nous encore à notre première formule, où le second terme manquoit, & examinons les cas qui font de la forme

mule

mule $axx + b$ un carré en nombres entiers.

Soit donc $axx + b = yy$, & il s'agira de remplir deux conditions:

1°. Qu'on connoisse un cas où cette équation ait lieu, & nous supposerons ce cas exprimé par l'équation $aff + b = gg$.

2°. Qu'on connoisse des valeurs de m & de n , telles que $mm = ann + 1$, ce que nous enseignerons à trouver dans le Chapitre suivant.

De-là résulte un nouveau cas, savoir $x = ng + mf$, & $y = mg + anf$, qui conduit ensuite à d'autres cas pareils; que nous représenterons de la manière suivante:

$$\begin{array}{l} x = f | A | B | C | D | E \\ y = g | P | Q | R | S | T \&c. \end{array}$$

où $A = ng + mf$, $B = nP + mA$, $C = nQ + mB$, $D = nR + mC$, & $P = mg + anf$, $Q = mP + anA$, $R = mQ + anB$, $S = mR + anC$ &c.; & ces deux suites de nombres se continuent très-aisément aussi loin qu'on veut,

95.

On remarquera cependant qu'il n'est pas possible ici de continuer la suite supérieure

Tome II.

H

pour x , sans avoir l'inférieure sous les yeux; mais il est facile de lever cet inconvénient & de donner une règle, non-seulement pour trouver la suite supérieure sans connaître l'inférieure, mais aussi pour déterminer celle-ci sans le secours de l'autre.

Il faut observer que les nombres qu'on peut substituer à x se suivent dans une certaine progression, telle que chaque terme, comme, par ex. E , peut se déterminer par les deux termes précédens C & D , sans que l'on soit obligé de recourir aux termes inférieurs R & S . En effet, puisque $E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC) = 2mnR + annC + mmC$; & que $nR = D - mC$, on trouve $E = 2mD - mmC + annC$, ou $E = 2mD - (mm - ann)C$, ou enfin $E = 2mD - C$, à cause de $mm = ann + 1$ & de $mm - ann = 1$; moyennant quoi on voit clairement comment chaque terme se détermine par les deux qui le précèdent.

Il en est de même à l'égard de la suite inférieure; car puisque $T = mS + anD$; & $D = nR + mC$, on a $T = mS + annR$

+ $annC$. De plus $S = mR + anC$, ainsi $anC = S - mR$; & si l'on substitue cette valeur de anC , il vient $T = 2mS - R$, ce qui prouve que la progression inférieure suit la même loi ou la même règle que la supérieure.

Qu'on cherche, par exemple, tous les nombres entiers x , tels que $2xx - 1 = xy$. On aura d'abord $f = 1$ & $g = 1$; ensuite $mm = 2nn + 1$, si $n = 2$ & $m = 3$. Donc, puisque $A = ng + mf = 5$, les deux premiers termes seront 1 & 5; & on trouvera tous les suivans par la formule $E = 6D - C$; c'est-à-dire que chaque terme pris six fois & diminué du terme précédent, donne le terme suivant. Il suit de-là que les nombres x que nous cherchons, formeront la suite que voici:

1, 5, 29, 169, 985, 5741, &c.

On peut continuer cette progression aussi loin qu'on veut; & si l'on vouloit y introduire aussi des termes fractionnaires, on en trouveroit une infinité par la méthode que nous avons donnée plus haut.

H ij

CHAPITRE VII.

D'une Méthode particulière, par laquelle la formule $ann+1$ devient un quarré en nombres entiers.

96.

CE que nous avons enseigné dans le Chapitre précédent, ne peut s'exécuter d'une manière complète, à moins qu'on ne soit en état d'assigner pour un nombre quelconque a un nombre n , tel que $ann+1$ devienne un quarré, ou qu'on ait $mm = ann+1$.

Si on vouloit se contenter de nombres rompus, cette équation seroit facile à résoudre, vu qu'on n'auroit qu'à faire $m = 1 + \frac{np}{q}$; car dans cette supposition on a $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{n^2 pp}{q^2} = ann+1$, où l'on peut retrancher 1 de part & d'autre, & diviser ensuite les autres termes par n , de sorte que multipliant de plus par qq , on obtient $2pq + npp = anqq$, & cette équation donnant

$n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, fourniroit une infinité de valeurs de n . Mais comme n doit être un nombre entier, cette méthode ne nous serviroit de rien, & il faudra en employer une toute autre pour arriver à notre but.

97.

Nous devons commencer par remarquer que si on vouloit que $ann+1$ fût un quarré en nombres entiers pour une valeur quelconque de a , on exigeroit une chose qui n'est pas toujours possible.

Car d'abord il faut exclure tous les cas où a seroit un nombre négatif; ensuite il faut exclure aussi ceux où a seroit lui-même un quarré; parce qu'alors ann seroit un quarré, & qu'aucun quarré augmenté de l'unité, ne peut redevenir un quarré en nombres entiers. Nous sommes obligés par conséquent de restreindre notre formule, de manière que a ne soit ni négatif ni un quarré; mais au reste toutes les fois que a est un nombre positif sans être un quarré, il sera possible de trouver pour n un nombre

H iij

entier, tel que $ann+1$ devienne un carré. Quand on aura trouvé une telle valeur, il sera aisé, d'après le Chapitre précédent, d'en déduire un nombre infini de semblables; mais il suffit pour notre dessein d'en connoître une seule, & même la plus petite, & c'est ce qu'un savant Anglois, nommé *Pell*, nous a appris à trouver par une méthode ingénieuse que nous allons expliquer.

98.

Cette méthode n'est pas de nature à pouvoir être employée généralement pour un nombre a quelconque, elle n'est applicable que dans chaque cas particulier.

Ainsi nous commencerons par les cas les plus faciles, & nous chercherons d'abord pour n un nombre tel que $2nn+1$ soit un carré, ou que $\sqrt{2nn+1}$ devienne rationnel.

On voit aussi-tôt que cette racine quarrée devient plus grande que n , & cependant plus petite que $2n$. Si donc nous ex-

primons cette racine par $n+p$, il est sûr que p est moindre que n ; & nous aurons $\sqrt{2nn+1} = n+p$, ensuite $2nn+1 = nn+2np+pp$; donc $nn=2np+pp+1$, & $n=p+\sqrt{2pp-1}$. Tout se réduit par conséquent à ce que $2pp-1$ soit un carré; or ce cas a lieu si $p=1$, & il donne $n=2$ & $\sqrt{2nn+1}=3$.

Si on n'avoit pas aussi-tôt pu s'apercevoir de ce cas, on seroit allé plus loin; & puisque $\sqrt{2pp-1} > p$, & par conséquent $n > 2p$, il auroit fallu supposer $n=2p+q$; on auroit donc eu $2p+q=p+\sqrt{2pp-1}$, ou $p+q=\sqrt{2pp-1}$, & en quarrant, $pp+2pq+qq=2pp-1$; ainsi $pp=2pq+qq+1$, ce qui auroit donné $p=q+\sqrt{2qq+1}$; de sorte qu'il eût fallu que $2qq+1$ fût un carré; & comme ce cas a lieu, si on fait $q=0$, on auroit eu $p=1$ & $n=2$, comme auparavant. Cet exemple suffit pour donner une idée de la méthode, mais cette idée deviendra encore plus nette par ce qui suivra.

99.

Soit à présent $a=3$, c'est-à-dire qu'il s'agit de transformer en un carré la formule $3nn+1$. On fera $\sqrt{3nn+1}=n+p$, ce qui donne $3nn+1=nn+2np+pp$, & $2nn=2np+pp-1$, d'où l'on tire $n=\frac{p+\sqrt{3pp-1}}{2}$. Maintenant, puisque $\sqrt{3pp-2}$ surpasse p , & que par conséquent n est plus grand que $\frac{p}{2}$ ou que p , qu'on suppose $n=p+q$, & on aura $2p+2q=p+\sqrt{3pp-2}$ ou $p+2q=\sqrt{3pp-2}$; ensuite, en quarant, $pp+4pq+4qq=3pp-2$; de sorte que $2pp=4pq+4qq+2$, ou $pp=2pq+2qq+1$, & $p=q+\sqrt{3qq+1}$. Or cette formule est semblable à la proposée, ainsi on peut faire $q=0$, & on obtient $p=1$ & $n=1$; de sorte que $\sqrt{3nn+1}=2$.

100.

Soit $a=5$, afin qu'on ait à faire un carré de la formule $5nn+1$, dont la racine est plus grande que $2n$; on supposera $\sqrt{5nn+1}$

$=2n+p$, ou $5nn+1=4nn+4np+pp$, ainsi on aura $nn=4np+pp-1$, & $n=2p+\sqrt{5pp-1}$. Or $\sqrt{5pp-1}>2p$, il s'ensuit que $n>4p$; c'est pourquoi on fera $n=4p+q$, ce qui rend $2p+q=\sqrt{5pp-1}$, ou $4pp+4pq+qq=5pp-1$, & $pp=4pq+qq+1$, de manière que $p=2q+\sqrt{5qq+1}$; & comme $q=0$ satisfait à cette équation, on aura $p=1$ & $n=4$; donc $\sqrt{5nn+1}=9$.

101.

Supposons à présent $a=6$, pour avoir à traiter la formule $6nn+1$, dont la racine est pareillement comprise entre $2n$ & $3n$. Nous ferons donc $\sqrt{6nn+1}=2n+p$, & nous aurons $6nn+1=4nn+4np+pp$, ou $2nn=4np+pp-1$, & de-là $n=\frac{p+\sqrt{6pp-1}}{2}$, ou $n=\frac{2p+\sqrt{6pp-1}}{2}$; ainsi $n>2p$.

Si, en conséquence de cela, nous faisons $n=2p+q$, nous avons $4p+2q=2p+\sqrt{6pp-1}$, ou $2p+2q=\sqrt{6pp-1}$; les carrés sont $4pp+8pq+4qq=6pp-1$;

ainsi $2pp = 8pq + 4qq + 2$, & $pp = 4pq + 2qq + 1$, enfin $p = 2q + \sqrt{6qq + 1}$; cette formule ressemblant à la première, on a $q = 0$; donc $p = 1$, $n = 2$ & $\sqrt{6nn + 1} = 5$.

102.

Allons plus loin, & soit $a = 7$ & $7nn + 1 = mm$, on voit que $m > 2n$; qu'on fasse donc $m = 2n + p$, & on aura $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$, ou $3nn = 4np + pp - 1$, ce qui donne $n = \frac{2p + \sqrt{7pp - 3}}{3}$. Présentement, puisque $n > \frac{4}{3}p$, & par conséquent plus grand que p , qu'on fasse $n = p + q$, on aura $p + 3q = \sqrt{7pp - 3}$, & passant aux quarrés, $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$, ainsi $6pp = 6pq + 9qq + 3$, ou $2pp = 2pq + 3qq + 1$, d'où l'on tire $p = \frac{q + \sqrt{7qq + 2}}{2}$. Or on a ici $p > \frac{3}{2}q$, & par conséquent $p > q$, ainsi on fera $p = q + r$, & l'on aura $q + 2r = \sqrt{7qq + 2}$; de-là les quarrés $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$; ensuite $6qq = 4qr + 4rr - 2$, ou $3qq = 2qr + 2rr - 1$, & enfin $q = \frac{r + \sqrt{7rr - 3}}{3}$. On continuera, à cause de q

$> r$, en supposant $q = r + s$, & on aura $2r + 3s = \sqrt{7rr - 3}$, ensuite $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, ou $3rr = 12rs + 9ss + 3$, ou $rr = 4s + 3ss + 1$, & $r = 2s + \sqrt{7ss + 1}$. Or cette formule est pareille à la première; ainsi faisant $s = 0$, on obtiendra $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ & $n = 3$ ou $m = 8$.

Mais ce calcul peut s'abrégé considérablement de la manière qui suit, & qu'on peut employer aussi dans d'autres cas.

Puisque $7nn + 1 = mm$, il s'ensuit que $m < 3n$.

Qu'on suppose donc $m = 3n - p$, on aura $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, ou $2nn = 6np - pp + 1$, d'où l'on tire $n = \frac{3p + \sqrt{7pp + 2}}{2}$, ainsi $n < 3p$; par cette raison on écrira $n = 3p - 2q$, & prenant les quarrés, on aura $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, ou $2pp = 12pq - 4qq + 2$, & $pp = 6pq - 2qq + 1$, d'où résulte $p = 3q + \sqrt{7qq + 1}$. Or on peut d'abord faire ici $q = 0$, & on trouvera $p = 1$, $n = 3$ & $m = 8$, comme auparavant.

103.

Que $a=8$, en sorte que $8nn+1=mm$ & $m < 3n$, il faudra faire $m=3n-p$, & on aura $8nn+1=9nn-6np+pp$, ou $nn=6np-pp+1$, d'où résulte $n=3p+\sqrt{8pp+1}$, & cette formule étant déjà semblable à la proposée, on peut faire $p=0$, ce qui donne $n=1$ & $m=3$.

104.

On procédera toujours de la même manière pour tout autre nombre a , pourvu qu'il soit positif & non un carré, & on arrivera toujours à la fin à une quantité radicale, comme $\sqrt{au+1}$, qui sera semblable à la première ou la proposée, & on n'aura alors qu'à supposer $t=0$; car l'irrationalité disparaîtra, & en retournant sur ses pas on trouvera pour n nécessairement une valeur telle que $ann+1$ soit un carré.

On arrive quelquefois assez vite au but, mais souvent aussi on est obligé de passer par un assez grand nombre d'opérations;

cela dépend de la nature du nombre a , mais sans qu'on ait des caractères qui donnent quelques lumières sur la quantité des opérations qu'il y aura à faire. Le procédé n'est jamais bien long jusqu'à 13, mais lorsque $a=13$, le calcul devient beaucoup plus prolix, & par cette raison il sera bon de développer ici ce cas.

105.

Soit donc $a=13$, & qu'on doive trouver $13nn+1=mm$. Comme $mm > 9nn$, & par conséquent $m > 3n$, on supposera $m=3n+p$, & on aura $13nn+1=9nn+6np+pp$, ou $4nn=6np+pp-1$, & $n=\frac{3p+\sqrt{13pp-4}}{4}$, ce qui indique que $n > \frac{6}{4}p$, & à plus forte raison plus grand que p . Qu'on fasse donc $n=p+q$, on aura $p+4q=\sqrt{13pp-4}$; en quarant, $13pp-4=pp+8pq+16qq$; ainsi $12pp=8pq+16qq+4$, ou $3pp=2pq+4qq+1$, & $p=\frac{1+\sqrt{12q+3}}{3}$. Ici $p > \frac{1+3}{3}$, ou $p > q$; on continuera donc par $p=q+r$, & on aura $2q+3r=\sqrt{13qq+3}$,

ensuite $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, ou
 $9qq = 12qr + 9rr - 3$, ou $3qq = 4qr + 3rr$
 $- 1$, ce qui donne $q = \frac{2r + \sqrt{13rr - 3}}{3}$.

Présentement, puisque $q > \frac{2r + 3r}{3}$, ou q
 $> r$, on fera $q = r + f$, & on aura $r + 3f$
 $= \sqrt{13rr - 3}$; & ensuite $13rr - 3 = rr$
 $+ 6rf + 9ff$, où $12rr = 6rf + 9ff + 3$, ou $4rr$
 $= 2rf + 3ff + 1$, d'où l'on tire $r = \frac{f + \sqrt{13ff - 4}}{4}$.

Mais $r > \frac{f + 3f}{4}$ & plus grand que f , soit donc
 $r = f + t$, & nous aurons $3f + 4t = \sqrt{13ff + 4}$,
 & $13ff + 4 = 9ff + 24ft + 16tt$; ainsi $4ff$
 $= 24ft + 16tt - 4$, & $ff = 6ft + 4tt - 1$;
 donc $f = 3t + \sqrt{13tt - 1}$. Ici nous avons
 $f > 3t + 3t$, ou que $6t$; il faudra donc faire
 $f = 6t + u$; ainsi $3t + u = \sqrt{13tt - 1}$, &
 $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$; après cela $4tt$
 $= 6tu + uu + 1$; enfin $t = \frac{3u + \sqrt{13uu + 4}}{4}$, où t
 $> \frac{3u}{4}$ & $> u$. Si donc on fait $t = u + v$,
 on aura $u + 4v = \sqrt{13uu + 4}$, & $13uu + 4$
 $= uu + 8uv + 16vv$; donc $12uu = 8uv + 16vv$
 $- 4$, ou $3uu = 2uv + 4vv - 1$, enfin u
 $= \frac{v + \sqrt{13vv - 3}}{3}$, ou $u > \frac{v}{3}$, ou $u > v$.

Faisons en conséquence $u = v + x$, &
 nous aurons $2v + 3x = \sqrt{13vv - 3}$, & $13vv$
 $- 3 = 4vv + 12vx + 9xx$; ou $9vv = 12vx$
 $+ 9xx + 3$, ou $3vv = 4vx + 3xx + 1$, &
 $v = \frac{2x + \sqrt{13xx + 3}}{3}$; de sorte que $v > \frac{x}{3}$ & $> x$.

Supposons donc $v = x + y$, & nous au-
 rons $x + 3y = \sqrt{13xx + 3}$, & $13xx + 3$
 $= xx + 6xy + 9yy$, ou $12xx = 6xy + 9yy$
 $- 3$, & $4xx = 2xy + 3yy - 1$; on tire de-là
 $x = \frac{y + \sqrt{13yy - 4}}{4}$, & par conséquent $x > y$.
 Ainsi nous ferons $x = y + z$, ce qui nous
 donne $3y + 4z = \sqrt{13yy - 4}$, & $13yy - 4$
 $= 9yy + 24yz + 16zz$, ou $4yy = 24yz$
 $+ 16zz + 4$; donc $yy = 6yz + 4zz + 1$, &
 $y = 3z + \sqrt{13zz + 1}$; & cette formule étant
 à la fin semblable à la première, on peut
 prendre $z = 0$, & remonter de la manière
 qui suit:

$$z = 0$$

$$y = 1$$

$$x = y + z = 1$$

$$y = x + y = 2$$

$$u = v + x = 3$$

$$t = u + v = 5$$

$$f = 6t + u = 33$$

$$r = f + t = 38$$

$$q = r + f = 71$$

$$p = q + r = 109$$

$$n = p + q = 180$$

$$m = 3n + p = 649.$$

Il suit de-là que 180 est après 0 le plus petit nombre qu'on puisse substituer à n ; si $13zn + 1$ doit devenir un carré.

106.

On voit suffisamment par cet exemple, combien ces calculs peuvent devenir prodigieux. Lorsqu'il s'agit de nombres plus grands, on est souvent obligé de passer par dix fois plus d'opérations que nous n'en avons eu à faire pour le nombre 13.

Comme on ne peut guère prévoir non plus

plus pour quels nombres on doit s'attendre à tant de longueurs, il sera bon de profiter de la peine que d'autres ont prise, & nous joindrons, pour cet effet, à ce Chapitre une table, où se trouvent les valeurs de m & de n pour tous les nombres a depuis 2 jusqu'à 100; afin que dans les cas qui peuvent se présenter, on puisse en tirer les valeurs de m & de n , qui répondent à un nombre a donné.

107.

Nous remarquerons cependant que pour de certains nombres on peut déterminer en général les lettres m & n ; ces cas sont ceux où a n'est que de 1 ou 2 plus grand ou plus petit qu'un carré; il vaudra la peine de les développer.

108.

Soit donc $a = ee - 2$; & puisque nous devons avoir $(ee - 2)nn + 1 = mm$, il est clair que $m < en$; c'est pourquoi nous ferons $m = en - p$, & nous aurons $(ee - 2)nn$

Tome II.

$+1 = een - 2en + pp$, ou $2nn = 2enp - pp + 1$; donc $n = \sqrt[4]{epp - 2pp + 1}$; & il est évident que si on fait $p = 1$, cette quantité devient rationnelle, & que nous aurons $n = e$ & $m = ee - 1$.

Soit, par exemple, $a = 23$, de sorte que $e = 5$, nous aurons $23n + 1 = mm$, si $n = 5$ & $m = 24$. La raison en est évidente d'ailleurs; car si, dans le cas de $a = ee - 2$, on fait $n = e$, on a $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, ce qui est le carré de $ee - 1$.

I O 9.

Que $a = ee - 1$, ou d'une unité moindre qu'un carré, il faudra que $(ee - 1)nn + 1 = mm$. On aura, comme ci-dessus, $m < en$, & on fera $m = en - p$; cela posé, on a $(ee - 1)nn + 1 = een - 2enp + pp$, ou $nn = 2enp - pp + 1$; donc $n = ep + \sqrt[4]{epp - pp + 1}$. Or l'irrationalité disparoit dans la supposition de $p = 1$, ainsi $n = 2e$ & $m = 2ee - 1$. Aussi cela est-il facile à voir; car puisque $a = ee - 1$ & $n = 2e$, on trouve $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, ou égal au carré de

$2e - 1$. Soit, par exemple, $a = 24$, ou $e = 5$, on aura $n = 10$, & $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$ (*).

I I O.

Supposons à présent $a = ee + 1$, ou que a soit de 1 plus grand qu'un carré, il faudra que $(ee + 1)nn + 1 = mm$, & m sera évidemment plus grand que en ; écrivons donc $m = en + p$, & nous aurons $(ee + 1)nn + 1 = een + 2enp + pp$, ou $nn = 2enp + pp + 1$, d'où résulte $n = ep + \sqrt[4]{epp + pp + 1}$. On peut ici faire $p = 1$, & cela étant, on a $n = 2e$; donc $m = 2ee + 1$. C'est aussi ce qui devoit arriver, par la raison que a étant $ee + 1$ & $n = 2e$, on a $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$; carré de $2ee + 1$. Soit, par exemple, $a = 17$, en sorte que $e = 4$, on aura $17nn + 1 = mm$; en faisant $n = 8$ & $m = 33$.

(*) Le signe radical s'évanouit aussi dans ce cas, si l'on fait $p = 0$, & cette supposition donne incontestablement pour m & n les plus petits nombres possibles, savoir $n = 1$ & $m = e$; c'est-à-dire que si $e = 5$, la formule $24nn + 1$ devient un carré en faisant $n = 1$, & que la racine de ce carré sera $m = 5$.

III.

Soit enfin $a=ee+2$, ou de 2 plus grand qu'un nombre carré, on aura $(ee+2)nn+1=mm$, & comme auparavant, $m > en$, c'est pourquoi on supposera $m=en+p$, & on aura $een+2nn+1=een+2enp+pp$, ou $2nn=2enp+pp-1$, ce qui donne $n=\frac{e \pm \sqrt{4ep^2-pp^2}}{2}$. Qu'on fasse $p=1$, on trouvera $n=e$ & $m=ee+1$; & en effet, puisque $a=ee+2$ & $n=e$, on a $ann+1=e^2+2ee+1$, ce qui est le carré de $ee+1$.

Soit, par exemple, $a=11$, de sorte que $e=3$, on trouvera $11nn+1=mm$, en faisant $n=3$ & $m=19$. Voulut-on supposer $a=83$, on auroit $e=9$ & $83nn+1=mm$ dans le cas de $n=9$ & de $m=82$.

T A B L E

Qui indique pour chaque valeur de a les plus petits nombres m & n , tels que $mm=ann+1$.

a	n	m	a	n	m
2	2	3	26	10	51
3	1	2	27	5	26
5	4	9	28	24	127
6	2	5	29	1820	9801
7	3	8	30	2	11
8	1	3	31	273	1520
10	6	19	32	3	17
11	3	10	33	4	23
12	2	7	34	6	35
13	180	649	35	1	6
14	4	15	37	12	73
15	1	4	38	6	37
17	8	33	39	4	25
18	4	17	40	3	19
19	39	170	41	320	2049
20	2	9	42	2	13
21	12	55	43	531	3482
22	42	197	44	30	199
23	5	24	45	24	161
24	1	5	46	3588	24335

<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	<i>a</i>	<i>n</i>	<i>m</i>
47	7	48	74	430	3699
48	1	7	75	3	26
50	14	99	76	6630	57799
51	7	50	77	40	351
52	90	649	78	6	53
53	9100	66249	79	9	80
54	66	485	80	1	9
55	12	89	82	18	163
56	2	15	83	9	82
57	20	151	84	6	55
58	2574	19603	85	30996	285769
59	69	530	86	1122	10405
60	4	31	87	3	28
61	226153980	1766319049	88	21	197
62	8	63	89	53000	500001
63	1	8	90	■	19
65	16	129	91	165	1574
66	8	65	92	120	1151
67	5967	48842	93	1260	12151
68	4	33	94	221064	2143295
69	936	7775	95	4	39
70	30	251	96	1	49
71	413	3480	97	637735	62809633
72	2	17	98	10	99
73	267000	2281249	99	1	108

CHAPITRE VIII.

De la Maniere de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a+bx+cx+dx^3}$.

I 12.

Nous passerons à présent à une formule où x s'éleve à la troisième puissance, après quoi nous irons aussi jusqu'à la quatrième puissance de x , quoique ces deux cas se traitent de la même manière.

Qu'il s'agisse donc de transformer en un carré la formule. $a+bx+cx+dx^3$, & de trouver pour x des valeurs propres pour ce dessein, & exprimées en nombres rationnels. Comme cette recherche est sujette déjà à de bien plus grandes difficultés que les précédentes, il faut aussi plus d'art pour trouver seulement même des valeurs fractionnaires de x , & on est obligé de se contenter de telles valeurs sans prétendre en trouver en nombres entiers.

Nous devons remarquer aussi d'avance qu'on ne peut ici donner une solution générale comme dans les cas précédens, & qu'au lieu que la méthode employée ci-dessus conduisoit à un nombre infini de solutions à la fois, chaque opération maintenant ne nous fera connoître qu'une seule valeur de x .

II 3.

Comme, en traitant de la formule $a+bx+cx^2$, nous avons remarqué un nombre infini de cas où la solution est tout-à-fait impossible, on s'imagine bien que cela a lieu bien plus souvent encore pour la formule présente, qui d'ailleurs exige constamment qu'on sache déjà, ou qu'on ait trouvé une solution. Aussi n'est-on en état ici de donner des règles que pour les cas où l'on part d'une solution connue pour en trouver une nouvelle; par le moyen de celle-ci alors on peut en trouver une autre, & continuer ensuite de la même manière.

Mais il n'arrive pas même toujours que

une solution connue fasse parvenir à une autre; au contraire il y a bien des cas où il n'y a qu'une seule solution qui puisse avoir lieu, & cette circonstance est d'autant plus remarquable, que dans les cas que nous avons développés précédemment, une seule solution conduisoit à une infinité d'autres solutions nouvelles.

II 4.

Nous venons de dire que pour que la formule $a+bx+cx^2+dx^3$ puisse être transformée en un carré, il faut nécessairement présupposer un cas où cette transformation est possible. Or un tel cas s'aperçoit le plus clairement, quand le premier terme est lui-même déjà un carré, & que la formule est exprimée ainsi, $ff+bx+cx^2+dx^3$; car elle devient évidemment un carré, si $x=0$.

Ce sera donc par la considération de cette formule que nous entrerons en matière; nous tâcherons de voir comment, en partant du cas connu $x=0$, nous

pourrons parvenir à quelqu'autre valeur de x , & nous emploierons pour cet effet deux méthodes différentes, que nous expliquerons l'une & l'autre; il sera bon de commencer par des cas particuliers.

I I 5.

Soit donc proposée la formule $1 + 2x - xx + x^3$, qui doit devenir un carré, Comme ici le premier terme est un carré, on adoptera pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes s'évanouissent. Soit pour cet effet $1 + x$ la racine dont le carré doit équivaloir à notre formule, on aura $1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx$, où les deux premiers termes se détruisent, de sorte qu'on a l'équation $xx = -xx + x^3$ ou $x^3 = 2xx$, qui, étant divisée par xx , donne $x = 2$; ainsi la formule devient $1 + 4 - 4 + 8 = 9$.

De même, pour faire un carré de la formule $4 + 6x - 5xx + 3x^3$, on supposera d'abord la racine $= 2 + nx$, & on cherchera n de manière que les deux premiers

termes disparaissent; or on aura $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx$; donc il faut que $4n = 6$, & $n = \frac{3}{2}$; de-là résulte l'équation $-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$, ou $3x^3 = \frac{19}{4}xx$, qui donne $x = \frac{19}{12}$; & c'est cette valeur qui fera de la formule proposée un carré, dont la racine sera $2 + \frac{19}{12}x = \frac{45}{12}$.

I I 6.

La seconde méthode consiste à donner à la racine trois termes, comme $f + gx + hxx$, tels que dans l'équation les trois premiers termes s'évanouissent.

Soit proposée, par exemple, la formule $1 - 4x + 6xx - 5x^3$, on en supposera la racine $= 1 - 2x + hxx$, & on aura $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx - 4hx^3 + h^2hxx$;

les deux premiers termes, comme on voit, se détruisent aussi-tôt des deux côtés; & pour chasser aussi le troisième, il faudra faire $6 = 2h + 4$, & par conséquent $h = 1$;

par ce moyen on obtient $-5x' = -4x' + x^4$, ou $-5 = -4 + x$; de sorte que $x = -1$.

I 17.

C'est donc de ces deux méthodes qu'on peut faire usage, lorsque le premier terme a est un carré. La première se fonde sur ce qu'on exprime la racine par deux termes, comme $f + px$, où f est la racine quarrée du premier terme, & où p est pris de manière que le second terme doit pareillement disparaître; en sorte qu'il ne reste qu'à comparer $ppxx$ avec le troisième & le quatrième terme de la formule, savoir $cx + dx^3$; car cette équation alors, pouvant se diviser par xx , donne une nouvelle valeur de x , qui est $x = \frac{pp - c}{d}$.

Dans la seconde méthode on donne trois termes à la racine, c'est-à-dire que si le premier terme a est $= ff$, on exprime la racine par $f + px + qxx$; après quoi on détermine p & q , de façon que les trois premiers termes de la formule s'évanouissent, ce qui se fait de la manière suivante:

Puisque $ff + bx + cx + dx^3 = ff + 2px + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$, il faut que $b = 2fp$, & par conséquent $p = \frac{b}{2f}$; de plus $c = 2fq + pp$, & partant $q = \frac{c - pp}{2f}$; après cela reste l'équation $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$; & comme elle est divisible par x^3 , on en tire $x = \frac{d - 2pq}{q}$.

I 18.

Il peut cependant arriver souvent que lors même que $a = ff$, aucune de ces deux méthodes ne donne une nouvelle valeur de x . C'est ce qu'on peut voir, en considérant la formule $ff + dx^3$, où le second & le troisième terme manquent.

Car si, d'après la première méthode, on supposoit la racine $= f + px$, ou bien que $ff + dx^3 = ff + 2fp + ppxx$, on auroit $0 = 2fp$, & $p = 0$; ainsi on trouveroit $dx^3 = 0$; & par-là $x = 0$, ce qui n'est point une nouvelle valeur de x .

Que si, d'après la seconde méthode, on vouloit faire la racine $= f + px + qxx$, ou $ff + dx^3 = ff + 2fp + 2fqxx + 2pqx^3 + qqx^4 + ppxx$

on trouveroit $0 = 2fp$ & $p = 0$; de plus
 $0 = 2fq + pp$ & $q = 0$; & il en résulteroit
 $dx' = 0$, & pareillement $x = 0$.

119.

Il ne reste d'autre parti à prendre dans
ces cas-là, que de tâcher de trouver quel-
que valeur de x , telle que la formule de-
vienne un carré; si on y réussit, cette va-
leur fera trouver ensuite, par le secours
de nos deux méthodes, de nouvelles va-
leurs; & cette voie est bonne même pour
les cas où le premier terme ne seroit pas
un carré.

Que, par exemple, la formule $3 + 3x$
doive devenir un carré, comme cela
arrive quand $x = 1$, on fera $x = 1 + y^2$,
& on aura $4 + 3y + 3yy + y^3$, où le pre-
mier terme est un carré. Qu'on en sup-
pose donc, suivant la première méthode,
la racine $= 2 + py$, on aura $4 + 3y + 3yy$
 $+ y^3 = 4 + 4py + ppyy$; & pour que le
second terme disparoisse, il faudra que
 $3 = 4p$, & par conséquent $p = \frac{3}{4}$; ainsi;

$+y = pp$ & $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$;
donc $x = \frac{-39}{16}$, ce qui est une nouvelle va-
leur de x .

Si on fait de plus, conformément à la
seconde méthode, la racine $= 2 + py + qyy$,
on a $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + 4qyy$
 $+ ppyy + 2pqy' + qqy'$, d'où on chaf-
siera le second terme, en faisant $3 = 4p$ ou
 $p = \frac{3}{4}$, & le quatrième, en faisant $3 = 4q$
 $+ pp$, ou $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{39}{64}$; ainsi $1 = 2pq + qqy$,
d'où l'on tire $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$, ou $y = \frac{319}{1541}$, &
par conséquent $x = \frac{1873}{1541}$.

120.

En général, si on a la formule $a + bx$
 $+ cxx + dx^3$, & qu'on sache d'ailleurs
qu'elle devient un carré quand $x = f$, de
forte que $a + bf + cff + df^3 = gg$, on
fera $x = f + y$, & on aura la nouvelle for-
mule qui suit:

$$\begin{array}{l}
 a \\
 +bf+by \\
 +cff+2cfy+cy^2 \\
 +df^2+3dfy+3dyy+dy^3
 \end{array}$$

$$eg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3df)xy + dy^2.$$

Dans cette formule le premier terme est un carré; ainsi on peut y appliquer les deux méthodes précédentes, & elles fourniront de nouvelles valeurs de y , & par conséquent aussi de x ; puisque $x = f + y$.

121.

Mais souvent aussi il ne sert même de rien d'avoir trouvé une valeur de x ; ce cas a lieu dans la formule $1+x^2$, qui devient un carré quand $x=2$. Car si, en conséquence de cela, on fait $x=2+y$, on trouvera la formule $9+12y+6yy+y^2$, qui devroit de même pouvoir devenir un carré.

Or soit par la première règle la racine $= 3 + py$, on aura $9 + 12y + 6yy + y^2 = 9 + 6py + ppyy$, où il faut que $12 = 6p$ & $p = 2$; donc $6 + y = pp = 4$, & $y = -2$,
ce

ce qui donne $x=0$, c'est-à-dire une valeur qui ne conduit à rien de plus.

Essayons aussi la seconde méthode, & faisons la racine $= 3 + py + qyy$, nous aurons $9 + 12y + 6yy + y^2 = 9 + 6py + 6qyy + ppyy$

$+ 2pqy^2 + qqy^4$, où il faudra d'abord que $12 = 6p$ & $p = 2$; ensuite que $6 = 6q + pp = 6q + 4$, & $q = \frac{2}{6}$; on aura d'abord $1 = 2p + qy = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}y$; de-là $y = -3$, & par conséquent $x = -1$, & $1+x^2 = 0$; d'où l'on ne peut rien conclure de plus, parce que, si on vouloit faire $x = -1 + z$, on trouveroit la formule $3z - 3zz + z^3$, où le premier terme s'en va; de sorte qu'on ne pourroit faire usage ni de l'une ni de l'autre méthode.

On est assez fondé à soupçonner, après ce que nous venons de dire, que la formule $1+x^2$ ne peut devenir un carré que dans les trois cas que voici:

I.) $x=2$, II.) $x=0$, III.) $x=-1$.

Mais c'est de quoi on peut se convaincre aussi par d'autres raisons.

Tome II.

K

122.

Considérons encore, pour nous exercer, la formule $1+3x^3$, qui devient un carré dans les cas suivans : I.) $x=0$, II.) $x=1$, III.) $x=2$, & voyons si nous parviendrons à trouver d'autres valeurs semblables.

Puis donc que $x=1$ est une des valeurs qui satisfont, supposons $x=1+y$, & nous aurons $1+3x^3=4+9y+9yy+3y^3$. Que la racine de cette nouvelle formule soit $2+py$, en sorte que $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppy$, il faudra que $9=4p$ & $p=\frac{9}{4}$, & les autres termes donneront $9+3y=pp=\frac{81}{16}$ & $y=-\frac{21}{16}$; par conséquent $x=-\frac{5}{16}$, & $1+3x^3$ devient un carré, dont la racine est $-\frac{61}{64}$, ou bien aussi $+\frac{61}{64}$. Si nous voulions à présent continuer, en faisant $x=-\frac{5}{16}+z$, nous ne manquerions pas de trouver de nouvelles valeurs.

Appliquons aussi à la même formule la seconde méthode, & supposons la racine $=2+py+qyy$; cette supposition donne

$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppy$; donc il faudra que $9=4p$ ou $p=\frac{9}{4}$, & $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, ou $q=\frac{61}{64}$; & les autres termes donneront $3=2pq+qqy=\frac{167}{128}+qqy$, ou $567+128qqy=384$, ou $128qqy=-183$; c'est-à-dire $126\frac{51}{64}y=-183$, ou $42\frac{61}{64}y=-61$. Ainsi $y=-\frac{1912}{1313}$, & $x=-\frac{659}{1313}$; & ces valeurs en fourniront de nouvelles, en suivant les voies que nous avons indiquées.

123.

Il faut remarquer cependant que, si on vouloit se donner la peine de tirer de nouvelles valeurs des deux qu'a fourni le cas connu $x=1$, on parviendroit à des fractions extrêmement prolixes; & on a lieu de s'étonner que ce cas, $x=1$, n'ait pas conduit plutôt à cet autre, $x=2$, qui ne tombe pas moins évidemment sous les yeux. Et c'est-là une imperfection de la méthode dont il est question, & qui est jusqu'à présent la seule qu'on connoisse.

On peut partir de la même manière du cas $x=2$, afin de trouver d'autres valeurs. Qu'on fasse, pour cet effet $x=2+y$, & il s'agira de faire un carré de la formule $25+36y+18yy+3y^2$; supposons-en la racine, d'après la première méthode, $=5+py$, nous aurons $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+ppyy$, & par conséquent $36=10p$, ou $p=\frac{18}{5}$; effaçant à présent les termes qui se détruisent, & divisant les autres par yy , il en résulte $18+3y=pp$ — $\frac{324}{25}$, & par conséquent $y=-\frac{42}{25}$, & $x=\frac{8}{25}$; d'où il suit que $1+3x^2$ est un carré dont la racine est $5+py=-\frac{731}{125}$ ou $+\frac{111}{125}$.

Dans la seconde méthode il faudroit supposer la racine $=5+py+qqy$, & on auroit $25+36y+18yy+3y^2=25+10py+10qyy+2p^2y^2+qqy^2$; les seconds & troisièmes termes disparaîtroient en faisant $36=10p$, ou $p=\frac{18}{5}$, & $18=10q+pp$, ou $10q=18-\frac{324}{25}=\frac{116}{25}$, ou $q=\frac{63}{125}$; & alors les autres termes, divisés par y^2 ,

donneroient $3=2pq+qqy$, ou $qqy=3-2pq=-\frac{323}{625}$, c'est-à-dire $y=-\frac{3275}{1325}$ & $x=-\frac{639}{1325}$.

124.

Ce calcul ne devient pas moins long & difficile, même dans des cas où, en partant d'un autre principe, il est facile de donner une solution générale; comme, par exemple, quand la formule proposée est $1-x-xx+x^2$, où l'on peut faire généralement $x=nn-1$, en donnant à n telle valeur qu'on veut. En effet, soit $n=2$, on aura $x=3$, & la formule devient $=1-3-9+27=16$. Soit $n=3$, on aura $x=8$, & la formule devient $=1-8-64+512=441$, & ainsi de suite.

Mais remarquons que c'est à une circonstance tout-à-fait particulière que nous devons une solution si facile, & cette circonstance s'apperoit aisément, si on décompose notre formule en facteurs; car on voit aussitôt qu'elle est divisible par $1-x$, que le quotient sera $1-xx$, qu'il

est composé des facteurs $(1+x)(1-x)$, & qu'enfin notre formule $1-x-xx+x^3 = (1-x)(1+x)(1-x) = (1-x)^2(1+x)$; or, puisqu'elle doit être un \square (quarré), & qu'un \square , divisé par un \square , donne un \square pour quotient, il faut aussi que $1+x = \square$; & réciproquement, si $1+x$ est un \square , il faut que $(1-x)^2(1+x)$ soit un \square ; on n'a donc qu'à faire $1+x=nn$, & on aura sur le champ $x=nn-1$.

Si cette circonstance nous eût échappé, il auroit été difficile de déterminer même seulement cinq ou six valeurs de x par les méthodes précédentes.

125.

Il s'enfuit donc de-là qu'il est bon pour chaque formule proposée de la résoudre en facteurs, quand cela est possible. Or nous avons fait voir plus haut comment on s'y prend pour cet effet, savoir qu'il faut égaler la formule donnée à zéro, & chercher ensuite la racine de cette équation, chaque racine alors, comme $x=f$, donnant un

facteur $f-x$; & cette recherche est d'autant plus aisée, qu'on ne cherche ici que des racines rationnelles, lesquelles sont toujours des diviseurs du terme connu ou du terme qui ne renferme point de x .

126.

Cette circonstance a lieu aussi dans notre formule générale $a+bx+cx^2+dx^3$, quand les deux premiers termes disparaissent, & que par conséquent c'est la quantité cx^2+dx^3 qui doit être un quarré; car il est clair, dans ce cas, qu'en divisant par le quarré xx , il faudra pareillement que $c+dx$ soit un quarré, & on n'a donc qu'à supposer $c+dx=nn$, pour avoir $x=\frac{nn-c}{d}$, valeur qui renferme un nombre infini de solutions, & même toutes les solutions possibles.

127.

Si dans l'application de la première des deux méthodes précédentes on ne vouloit pas déterminer la lettre p afin de retrancher le second terme, on parviendrait à une

autre formule irrationnelle, qu'il s'agiroit de rendre rationnelle.

Soit, par exemple, $ff+bx+cx+dx^3$ la formule proposée, & qu'on en fasse la racine $=f+px$, on aura $ff+bx+cx+dx^3 = ff+2fp+ppxx$, où les premiers termes se détruisent; divisant donc les autres par x , on obtient $b+cx+dx = 2fp+ppx$, ce qui est une équation du second degré, qui donne

$$x = \frac{pp-c + \sqrt{p^4 - 2cpp + 8d fp + cc - 4bd}}{2d}.$$

Ainsi l'affaire se réduit maintenant à trouver pour p des valeurs telles, que la formule $p^4 - 2cpp + 8d fp + cc - 4bd$ devienne un carré. Or comme c'est la quatrième puissance du nombre cherché p qui se présente ici, ce cas appartient au Chapitre suivant.



CHAPITRE IX.

De la maniere de rendre rationnelle la formule incommensurable

$$\sqrt{a+bx+cx+dx'+ex'}.$$

128.

Nous voici parvenus à des formules où le nombre indéterminé x monte à la quatrième puissance, & c'est par là que nous terminerons nos recherches sur les quantités affectées du signe de la racine quarrée, vu qu'on n'a pas été assez loin encore pour pouvoir transformer en quarrés des formules où des puissances plus hautes de x se présentent.

Notre nouvelle formule fournit trois cas à considérer: le premier, quand le premier terme, a , est un carré; le second, quand le dernier terme, ex' , est un carré; & le troisieme; quand le premier terme & le dernier sont l'un & l'autre des carrés.

Nous traiterons de chacun de ces cas séparément.

129.

I.) Résolution de la formule

$$\sqrt{ff+bx+cx+dx'+ex''}.$$

Comme le premier terme ici est un quadré, on pourroit, par la première méthode, supposer la racine $=f+px$, & déterminer p , de manière que les deux premiers termes disparussent, & que les autres fussent divisibles par xx ; mais on ne laisseroit pas alors de rencontrer encore un xx dans l'équation, & la détermination de x dépendroit d'un nouveau signe radical. Ce sera donc à la seconde méthode que nous aurons recours; nous ferons la racine $=f+px+qxx$; nous déterminerons p & q de façon à pouvoir retrancher les trois premiers termes, & divisant ensuite les autres par x^3 , nous parviendrons à une simple équation du premier degré, qui donnera x dégagé de signes radicaux.

130.

Si donc la racine $=f+px+qxx$, & qu'ainsi $ff+bx+cx+dx'+ex''=ff+2fp+2fqxx+2pqx'+qqx''$, les

premiers termes disparaissent d'eux-mêmes; quant aux seconds, on les chassera en faisant $b=2fp$, ou $p=\frac{b}{2f}$, & il faudra, pour les troisièmes, que $c=2fq+pp$, ou $q=\frac{c-pp}{2f}$; cela posé, les autres termes seront divisibles par x^3 , & donneront l'équation $d+ex=2pq+qqx$, de laquelle on tire $x=\frac{d-2pq}{qq-e}$, ou $x=\frac{2pq-d}{e-qq}$.

131.

Or il est facile de voir que cette méthode ne mène à rien, quand le second & le troisième terme manquent dans notre formule, c'est-à-dire que tant b que $c=0$; car alors $p=0$ & $q=0$; par conséquent $x=\frac{d}{e}$, d'où l'on ne peut ordinairement rien conclure, parce que ce cas donne

évidemment $dx^1 + ex^4 = 0$, & qu'ainsi notre formule devient égale au quarré ff . Mais c'est sur-tout pour les formules telles que $ff + ex^4$, que cette méthode n'est d'aucun usage, puisque dans ce cas d étant aussi $= 0$, on trouve pareillement $x = 0$, valeur qui ne conduit à rien de plus. Il en est de même, lorsque $b = 0$ & $d = 0$, c'est-à-dire que le second & le quatrième terme manquent, & que la formule est $ff + cxx + ex^4$; car dans ce cas $p = 0$ & $q = \frac{c}{2}$, d'où résulte $x = 0$, comme on le voit aussitôt, & ce qui n'est d'aucun usage ultérieur.

132.

II.) Résolution de la formule

$$\sqrt{a + bx + cxx + dx^3 + gxx^4}.$$

On pourroit réquie cette formule au cas précédent, en supposant $x = \frac{1}{y}$; car, comme il faudroit alors que la formule $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$ fût un quarré, & que dans ce cas celle-ci reste un quarré,

si on la multiplie par le quarré y^4 , on n'auroit qu'à faire cette multiplication, & on obtiendrait la formule $ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg$, qui est tout-à-fait semblable à la précédente écrite à rebours.

Mais on n'a pas besoin de passer par ce procédé; on n'a qu'à supposer la racine $= gxx + px + q$, ou dans l'ordre inverse, $q + px + gxx$, & on aura $a + bx + cxx + dx^3 + ggxx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + ppxx$

$+ 2gpx^3 + ggxx^4$; or les cinquièmes termes se détruisant ici d'eux-mêmes, on déterminera d'abord p , de manière que les quatrièmes termes se détruisent pareillement, ce qui arrive quand $d = 2gp$, ou $p = \frac{d}{2g}$; ensuite on déterminera aussi q , afin de chasser les troisièmes termes, & on fera pour cet effet $c = 2gq + pp$, ou $q = \frac{c - pp}{2g}$; cela fait, les deux premiers termes fourniront l'équation $a + bx = qq + 2pqx$, d'où l'on tire $x = \frac{a - qq}{2pq - b}$, ou $x = \frac{qq - a}{b - 2pq}$.

133.

Nous retrouvons ici le défaut que nous avions remarqué ci-dessus dans le cas où le second & le quatrième terme manquent, c'est-à-d. que $b=0$ & $d=0$; en effet on trouve alors $p=0$ & $q=\frac{c}{2g}$, donc $x=\frac{a-\frac{c}{2g}}{0}$; or cette valeur étant infinie, ne mène pas plus loin que la valeur $x=0$, dans le premier cas; d'où il suit que cette méthode ne peut du tout être employée pour les expressions de la forme $a+cx^2+ggx^4$.

134.

III.) Résolution de la formule

$$\sqrt{ff+bx+cx^2+dx^3+ggx^4}.$$

Il est clair qu'on peut employer pour cette formule l'une & l'autre des deux méthodes, dont on vient de faire usage; car d'abord, à cause que le premier terme est un carré, on peut prendre pour la racine $f+px+qxx$, & faire évanouir les trois premiers termes; ensuite, comme le dernier terme est pareillement un carré, on

peut aussi faire la racine $=q+px+gxx$, & chasser les trois derniers termes, au moyen de quoi on trouvera même deux valeurs de x .

Mais on peut traiter aussi cette formule par deux autres méthodes qui leur appartiennent particulièrement.

Dans la première on suppose la racine $=f+px+gxx$, & on détermine p de façon que les seconds termes se détruisent; c'est-à-dire que, comme il faut que $ff+bx+cx^2+dx^3+ggx^4=ff+2fp+2fgxx+2gpx^2+ggx^4$, on fait $b=2fp$ ou $p=\frac{b}{2f}$; & puisque de cette manière tant les seconds termes que les premiers & les derniers termes se détruisent, on pourra diviser les autres par xx , & on aura l'équation $c+dx=2fg+pp+2gpx$, de laquelle on tirera $x=\frac{c+2fg-pp}{2g}$ ou $x=\frac{pp+2fg-c}{d-2gp}$. Et on doit sur-tout remarquer ici que comme dans la formule on ne trouve g qu'à la seconde puissance, la racine de ce carré, ou g , peut se prendre tant négative que

positive, & qu'il résulte de-là qu'on obtient encore une autre valeur de x , savoir x

$$= \frac{c + \sqrt{c^2 - 2pg - d}}{-2pg - d}, \text{ ou } x = \frac{pp - 2fg - c}{2pg - d}.$$

135.

Il est, ainsi que nous l'avons dit, encore une autre maniere de résoudre cette formule: elle consiste à supposer d'abord, comme auparavant, la racine $= f + px + gxx$, & à déterminer ensuite p de maniere que ce soient les quatriemes termes qui se détruisent; cela se fait en supposant dans l'équation fondamentale $d = 2gp$, ou $p = \frac{d}{2g}$; car puisque les premiers & les derniers termes disparaissent pareillement, on pourra diviser les autres par x , & il en résultera l'équation $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, qui donne $x = \frac{b - 2fp}{2fg - pp - c}$. De plus nous avons à remarquer que comme dans la formule le quarré ff se trouve seul, on peut supposer également que sa racine soit $-f$, & qu'ainsi on aura aussi $x = \frac{b - 2fp}{pp - 2fg - c}$. De sorte que cette méthode aussi fournit deux nouvelles valeurs de x ,
 &c

& que par conséquent les méthodes que nous avons employées, donnent en tout six nouvelles valeurs.

136.

Mais ici se présente de nouveau cette circonstance fâcheuse, qui fait que le second & le quatrieme terme manquant, ou b & d étant $= 0$, on ne peut trouver pour x aucune valeur qui réponde à notre but; de sorte qu'on ne peut parvenir à résoudre la formule $ff + cxx + ggxx$. En effet, si $b = 0$ & $d = 0$, on a par l'une & l'autre voie $p = 0$; & la premiere donnant $x = \frac{c - 2fg}{2fg}$, & l'autre donnant $x = 0$, elles ne sont pas plus propres l'une que l'autre à fournir des conclusions ultérieures.

137.

Voilà donc les trois formules auxquelles on peut appliquer les méthodes que nous avons détaillées jusqu'ici; & si dans la formule proposée ni l'un ni l'autre terme n'est un quarré, il n'y aura aucun succès à es-

pérer avant qu'on ait trouvé une valeur de x , telle que la formule devienne un carré.

Supposons donc que nous ayons trouvé que notre formule devient un carré dans le cas de $x=h$, où que $a+bh+chh+dh^2+eh^3=kk$, si nous faisons $x=h+y$, nous aurons une nouvelle formule dans laquelle le premier terme sera kk , c'est-à-dire un carré, & qui par conséquent retombera dans le premier cas. On peut aussi faire usage de cette transformation, après avoir déterminé par les méthodes précédentes une des valeurs de x , par exemple $x=h$; on n'a qu'à faire alors $x=h+y$, & on parvient à une nouvelle équation sur laquelle on peut opérer de la même manière. Les valeurs de x qu'on aura trouvées de cette façon, en fourniront de nouvelles; celles-ci encore d'autres, & ainsi de suite.

138.

Mais il est sur-tout à remarquer qu'on ne peut en aucune manière espérer de résoudre les formules où le second & le qua-

trième terme manquent, avant que d'avoir, pour ainsi dire, trouvé une solution; & quant au procédé qu'il faut suivre après cela, nous allons le mettre sous les yeux en l'appliquant à la formule $a+ex^4$, qui est une de celles qui se présentent le plus souvent.

Supposons donc qu'on ait trouvé une valeur $x=h$, & qu'on ait $a+eh^4=kk$; si l'on veut trouver par-là d'autres valeurs de x , on fera $x=h+y$, & il faudra que la formule suivante, $a+eh^4+4eh^3y+6eh^2y^2+4ehy^3+ey^4$, soit un carré; or cette formule revenant à celle-ci, $kk+4eh^3y+6eh^2y^2+4ehy^3+ey^4$, appartient à la première de nos trois espèces; ainsi nous ferons sa racine quarrée. $k+\frac{2eh^3}{k}y+\frac{2eh^2}{k}y^2+\frac{2eh}{k}y^3+\frac{e}{k}y^4$, & la formule elle-même par conséquent égale au carré $kk+2kpy+2kp^2y^2+2p^3y^3+p^4y^4$, d'où il faudra d'abord chasser le second terme en déterminant p & q en conséquence, c'est-à-dire en faisant

$$4eh^3=2kp, \text{ ou } p=\frac{2eh^3}{k}, \text{ \& } 6ehh=2kq$$

$$\begin{aligned} +pp, \text{ ou } q &= \frac{6ehh-pp}{2k} = \frac{3ehhkk-2ech^6}{k^3} \\ &= \frac{ehh(3kk-2eh^4)}{k^3}, \text{ ou enfin } q = \frac{ehh(kk+2a)}{k^3}, \end{aligned}$$

à cause de $eh^4 = kk - a$; après cela les termes restans, divisés par y^3 , donneront $4eh + ey = 2pq + qgy$, d'où l'on tire $y = \frac{4eh-2pq}{qg-e}$; le numérateur de cette fraction peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{4ehk^4 - 4ech^3(kk+2a)}{k^4}, \text{ ou, à cause de } eh^4 = kk - a, \text{ sous celle-ci,} \\ \frac{4ehk^4 - 4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4} \\ = \frac{4eh(-akk+2a^3)}{k^4} = \frac{4ach(2a-kk)}{k^4}. \end{aligned}$$

Quant au dénominateur $qg-e$, il devient

$$\begin{aligned} &= \frac{e(kk-a)(kk+2a)^3 - ek^6}{k^6} \\ &= \frac{e(3ak^4 - 4a^3)}{k^6} = \frac{ea(3k^4 - 4aa)}{k^6}; \text{ ainsi} \end{aligned}$$

$$\text{la valeur cherchée sera } y = \frac{2ach(2a-kk)}{k^4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k^6}{ae(3k^4 - 4aa)}, \text{ ou } y = \frac{2hkk(2a-kk)}{3k^4 - 4aa}, \text{ \& par} \\ \text{conséquent } x &= \frac{h(8akk - k^4 - 4aa)}{3k^4 - 4aa}, \text{ ou } x \\ &= \frac{h(k^4 - 8akk + 4aa)}{4aa - 3k^4}. \end{aligned}$$

Si donc on substitue cette valeur de x dans la formule $a+ex^4$, elle devient un quarré; & sa racine, que nous avons supposée $k+py+qyy$, aura cette forme,

$$\begin{aligned} k + \frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4 - 4aa} \\ + \frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)}{(3k^4 - 4aa)^2}, \text{ parce} \\ \text{que, comme nous avons vu, } p = \frac{2eh^3}{k}, q \\ = \frac{ehh(kk+2a)}{k^3}, \text{ \& } y = \frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4 - 4aa}. \end{aligned}$$

139.

Continuons de considérer la formule $a+ex^4$, & puisque le cas $a+eh^4 = kk$ est connu, regardons-le comme fournissant deux cas différens à cause de $x = +h$ & de $x = -h$; nous pourrons par cette raison transformer notre formule en une autre

de la troisieme espece, dans laquelle le premier & le dernier terme sont des quarrés. Cette transformation se fait par un artifice qui est souvent d'une grande utilité, & qui consiste à faire $x = \frac{a(1-y)^4 + a^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$, vient par-là $= \frac{a(1-y)^4 + a^4(1+y)^4}{(1-y)^4}$, ou bien

$$= \frac{kk + 4(kk - 2a)y + 6kky + 4(kk - 2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4}.$$

Qu'on suppose la racine de cette formule, conformément au troisieme cas, $= \frac{k+py-ky^2}{(1-y)^2}$, en sorte que le numérateur de notre formule devra être égal au quarré $kk + 2kpy - 2kky - 2kpy^3 + kky^4$; que $+ppyy$

l'on chasse les seconds termes, en faisant $4kk - 8a = 2kp$, ou $p = \frac{2kk - 4a}{k}$; qu'on divise les autres termes par yy , & on aura $6kk + 4(kk - 2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, ou $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$; or $p = \frac{2kk - 4a}{k}$, & $pk = 2kk - 4a$, ainsi $y(8kk - 16a) = \frac{4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}$, &c y

$$= \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}.$$
 Si nous voulons

trouver maintenant x , nous avons d'abord

$$1+y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk - 4a)}, \text{ \& en second}$$

$$\text{lieu } 1-y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk - 4a)}; \text{ ainsi } \frac{1+y}{1-y}$$

$$= \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}; \text{ \& par conséquent}$$

$$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}.$$

mais c'est au reste la même valeur que nous avons déjà trouvée ci-dessus.

I 40.

Soit, pour appliquer ce résultat à un exemple, la formule $2x^4 - 1$ qui doit devenir un quarré. Nous avons ici $a = -1$ & $e = 2$; & le cas connu où la formule est un quarré, est celui où $x = 1$; ainsi $h = 1$ & $kk = 1$, c'est-à-dire $k = 1$. Donc nous aurons la nouvelle valeur $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$; & puisque la quatrième puissance de x se trouve seule, on peut écrire

L iv

aussi $x = +13$, & de-là résulte $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Si nous regardons à présent ceci comme le cas connu, nous avons $h = 13$, & $k = 239$, & nous obtenons une nouvelle valeur de x , qui est $x = \frac{815730721 - 278488 + 4}{2447192159 - 4}$.
 $.13 = \frac{815919213}{2447192159} ; 13 = \frac{10607469769}{2447192159}$.

I 4 I.

Nous allons considérer de la même manière la formule un peu plus générale, $a + cxx + ex^4$, & nous prendrons pour le cas connu, où elle devient un carré, $x = h$; de sorte que $a + chh + eh^4 = kk$.

Supposons donc, afin de trouver par-là d'autres valeurs, que $x = h + y$, & notre formule prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} & chh + 2chy + cyy \\ & e h^4 + 4eh^3y + 6ehhy + 4ehy^3 + ey^4 \\ \hline & kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4. \end{aligned}$$

Le premier terme étant un carré, nous supposons que la racine carrée de cette

formule est $k + py + qy^2$; & la formule elle-même devra être égale au carré $kk + 2kpy + 2kqyy + 2pgy^3 + q^2y^4$; détermi-

minons à présent p & q , afin de retrancher les seconds & les troisièmes termes, nous aurons pour cet effet $2ch + 4eh^3 = 2kp$, ou $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, & $c + 6ehh = 2kq + pp$,

ou $q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$; maintenant les termes suivants étant divisés par y^3 , se réduisent à l'équation $4eh + ey = 2pq + q^2y$, qui donne enfin $y = \frac{4eh - 2pq}{q^2 - c}$, & par conséquent aussi la valeur $x = h + y$, qui fait que la racine carrée de notre formule est $k + py + qy^2$. Si après cela nous regardons ce nouveau cas comme le cas donné, nous pourrions trouver un autre nouveau cas, & continuer de la même manière autant que nous voudrions.

I 42.

Rendons l'article précédent plus clair, en l'appliquant à la formule $1 - xx + x^4$,

dans laquelle $a=1$, $c=-1$ & $e=1$. On voit aussi-tôt que le cas connu est $x=1$, & qu'ainsi $h=1$ & $k=1$. Si nous faisons donc $x=1+y$, & la racine quarrée de notre formule $=1+py+qyy$, il faudra d'abord que $p=1$ & ensuite $q=2$; & ces valeurs donnent $y=0$ & $x=1$; or voilà le cas connu, & on n'en a pas trouvé un nouveau; mais c'est qu'on peut prouver d'autre part que la formule proposée ne peut devenir un quarré que dans les cas de $x=0$ & de $x=\pm 1$.

I 43.

Soit donnée aussi pour exemple la formule $2-3xx+2x^4$, où $a=2$, $c=-3$ & $e=2$. Le cas connu se trouve aisément; il est $x=1$; ainsi $h=1$ & $k=1$. Si donc on fait $x=1+y$, & la racine $=1+py+qyy$, on a $p=1$ & $q=4$, & de-là résulte $y=0$ & $x=1$; ce qui n'est, comme ci-dessus, rien de nouveau.

I 44.

Autre exemple. Soit la formule $1+8xx+x^4$, où $a=1$, $c=8$ & $e=1$. Une légère considération suffit pour remarquer le cas satisfaisant $x=2$; car, en supposant $h=2$, on trouve $k=7$; ainsi faisant $x=2+y$, & la racine $=7+py+qyy$, on aura $p=\frac{32}{7}$ & $q=\frac{272}{343}$, d'où résulte $y=-\frac{1880}{2911}$ & $x=-\frac{18}{2911}$, & on peut omettre dans ces valeurs le signe *moins*. Mais observons de plus dans cet exemple, que, puisque le dernier terme est en soi déjà un quarré, & qu'il doit donc demeurer aussi un quarré dans la nouvelle formule, on peut également appliquer ici le procédé indiqué pour les cas de la troisième espèce. Soit donc comme auparavant $x=2+y$, & nous aurons

$$\begin{array}{r} 1 \\ 32+32y+8yy \\ 16+32y+24yy+8y^2+y^4 \\ 49+64y+32yy+8y^2+y^4, \end{array}$$

expression qu'on peut maintenant trans-

former en un quarré de plusieurs manieres: Car d'abord on peut supposer la racine $= 7 + py + yy$, & par conséquent la formule égale au quarré $49 + 14py + 14yy + 2py^2$

$+ ppyy$, faire évanouir les pénultiemes termes par la supposition de $2p = 8$, ou de $p = 4$; diviser les autres termes par y , & tirer de l'équation $64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y$; la valeur $y = -4$ & $x = -2$, ou $x = +2$, ce qui n'est à la vérité que le cas déjà connu.

Mais si l'on cherche à déterminer p de façon que les seconds termes disparaissent, on aura $14p = 64$, & $p = \frac{32}{7}$; & les autres termes, divisés par yy , formeront l'équation $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, ou $\frac{1710}{49}$ $+ \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, d'où l'on tire $y = -\frac{71}{28}$, & par conséquent $x = -\frac{15}{28}$, ou $x = +\frac{15}{28}$; & cette valeur transforme notre formule en un quarré, dont la racine est $\frac{1441}{784}$. De plus, comme $-yy$ n'est pas moins la racine du dernier terme que ne l'est $+yy$,

on peut aussi supposer la racine de la formule $= 7 + py - yy$, ou la formule même $= 49 + 14py - 14yy - 2py^2 + y^4$; on fera $+ ppyy$

évanouir les termes pénultiemes, en supposant $8 = -2p$, ou $p = -4$; & divisant les autres par y , on trouvera $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, ce qui donne $y = -4$, c'est-à-dire de nouveau le cas connu. Que si l'on vouloit chasser les seconds termes, on auroit $64 = 14p$, & $p = \frac{32}{7}$; par conséquent en divisant les autres termes par yy , on obtiendrait $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, ou $32 + 8y = \frac{138}{49} - \frac{64}{7}y$, d'où l'on tireroit $y = -\frac{71}{28}$ & $x = \pm \frac{15}{28}$, c'est-à-dire les mêmes valeurs que nous avons trouvées ci-dessus.

145.

On peut procéder de la même maniere à l'égard de la formule générale $a + bx + cxx + dx^3 + ex^4$, quand on connoît un cas comme $x = h$, dans lequel elle devient

un carré kk ; la méthode est toujours de supposer ensuite $x = h + y$; on obtient par-là une formule d'autant de termes que l'autre, & le premier desquels est kk ; si après cela on exprime la racine par $k + py + qyy$, & qu'on détermine p & q de manière que les seconds & les troisièmes termes disparaissent aussi, les deux derniers, pouvant être divisés par y^3 , se réduisent à une simple équation du premier degré, de laquelle on tire facilement y , & par conséquent aussi la valeur de x .

Mais on sera cependant, comme auparavant, obligé d'exclure un grand nombre de cas que donne cette méthode ; savoir ceux où la valeur qu'on trouve pour x , n'est autre que celle de $x = h$, qui étoit donnée, & dans lesquels par conséquent on n'a pas fait un pas en avant ; ces sortes de cas indiquent ou que la formule est impossible en elle-même, ou qu'il faudroit trouver encore quelqu'autre cas où elle devint un carré.

146.

Et voilà jusqu'où on est parvenu jusqu'à présent dans la résolution des formules qui sont affectées du signe de la racine carrée. On n'a fait encore aucune découverte pour celles où les quantités qui sont sous le signe passent le quatrième degré, & lorsqu'il se présente des formules qui renferment la cinquième puissance ou une puissance plus haute de x , les artifices que nous avons développés ne suffisent pas pour les résoudre, quand même on auroit un cas donné.

Pour qu'on puisse mieux se convaincre de la vérité de ce que nous disons, nous considérerons la formule $kk + bx + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5$, dont le premier terme est déjà un carré. Si on vouloit, ainsi qu'auparavant, supposer la racine de cette formule, $= k + px + qxx$, & déterminer p & q de manière à faire disparaître les seconds & les troisièmes termes, il resteroit cependant toujours encore trois termes

qui, divisés par x^3 , formeroient une équation du second degré, & on ne pourroit évidemment exprimer x que par une nouvelle quantité irrationnelle. Mais voudroit-on supposer la racine $= k+px+qxx+rx^3$, son carré monteroit à la sixieme puissance, & quand même, par conséquent, on détermineroit p , q & r de façon à retrancher les seconds, troisiemes & quatriemes termes, il n'en resteroit pas moins la quatrieme, la cinquieme & la sixieme puissance; & en divisant par x^4 , on ne laisseroit pas d'avoir une équation du second degré, qu'on ne pourroit résoudre sans le secours d'un signe radical. On voit par-là qu'en effet nous avons épuisé ce qu'il y a voit à dire sur les formules qui doivent être transformées en des carrés, & il ne nous reste qu'à passer aux quantités affectées du signe de la racine cubique.



CHAPITRE X.

De la Méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a+bx+cx+dx^3}$.

147.

ON cherche donc à présent des valeurs de x , telles que la formule $a+bx+cx+dx^3$ devienne un cube, & qu'on en puisse extraire la racine cubique. Nous préviendrons aussi-tôt qu'on ne pourroit espérer aucune solution de cette espece, si la formule passoit le troisieme degré; & nous ajouterons que si elle n'étoit que du second degré, c'est-à-dire que le terme dx^3 disparût, la solution n'en deviendroit cependant pas plus facile. Quant au cas où les deux derniers termes disparaîtroient, & dans lequel ce seroit la formule $a+bx$ qu'il s'agiroit de réduire en cube, on voit assez qu'il ne souffre aucune difficulté, & qu'on n'a qu'à faire $a+bx=p^3$, pour trouver sur le champ $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Nous devons remarquer de nouveau, avant que d'aller plus loin, que lorsque ni le premier ni le dernier terme ne sont des cubes, on ne doit pas penser à résoudre la formule, à moins qu'on ne connoisse déjà un cas où elle devient un cube, soit que ce cas se présente naturellement, soit qu'on ait été obligé de le chercher par le tâtonnement.

Ainsi nous avons d'abord trois especes de formules à considérer : l'une a lieu quand le premier terme est un cube, & comme alors la formule s'exprime par $f^3 + bx + cxx + dx^3$, on s'apperçoit immédiatement que le cas connu est celui de $x=0$. La seconde espece comprend la formule $a + bx + cxx + g^3x^3$, c'est-à-dire le cas où le dernier terme est un cube. La troisieme espece enfin est composée des deux premieres, & comprend les cas dans lesquels tant le premier terme que le dernier terme est un cube.

149.

Premier cas. Soit $f^3 + bx + cxx + dx^3$ la formule proposée qu'il s'agit de transformer en un cube.

Supposons que sa racine soit $=f + px$, & par conséquent que la formule soit égale au cube $f^3 + 3ffpx + 3fppxx + p^3x^3$; comme les premiers termes disparaissent d'eux-mêmes, nous déterminerons p de façon à faire disparaître aussi les seconds termes, savoir en faisant $b = 3ffp$, ou $p = \frac{b}{3f}$; présentement les termes restans, étant divisibles par xx , donnent $c + dx = 3fp + p^3x$, ainsi $x = \frac{c - 3fp}{p^3 - d}$.

Si le dernier terme dx^3 ne s'étoit pas trouvé dans la formule, on auroit pu supposer simplement la racine cubique $=f$, & on auroit eu $f^3 = f^3 + bx + cxx$, ou $b + cx = 0$ & $x = -\frac{b}{c}$; mais cette valeur n'auroit pu servir à en trouver d'autres.

150.

Deuxieme cas. Si en second lieu l'expression proposée a cette forme, $a+bx+cx+g^3x^3$, on indiquera sa racine cubique par $p+gx$, dont le cube est $p^3+3gppx+3ggpx+g^3x^3$, de sorte que les derniers termes se détruisent; maintenant qu'on détermine p de façon qu'aussi les pénultiemes disparaissent: cela se fera en supposant $c=3gp$ ou $p=\frac{c}{3g}$, & les autres termes donneront ensuite $a+bx=p^3+3gp^2x$, d'où l'on tire $x=\frac{a-p^3}{3gp^2-b}$.

Si le premier terme a avoit manqué, on auroit pu se contenter d'exprimer la racine cubique par gx , & on auroit eu $g^3x^3=bx+cx+g^3x^3$, ou $0=b+cx$, donc $x=-\frac{b}{c}$; mais cette valeur ordinairement ne sert de rien pour en trouver d'autres.

151.

Troisième cas. Soit enfin troisièmement la formule $f^3+bx+cx+g^3x^3$, dans la-

quelle le premier & le dernier terme sont des cubes; il est clair qu'on pourra la traiter comme l'une & comme l'autre des deux especes précédentes, & par conséquent qu'on pourra obtenir deux valeurs de x .

Mais outre cela on peut aussi faire la racine $=f+gx$, puis égaler la formule au cube $f^3+3ffgx+3fggx+g^3x^3$, & à cause que les premiers & les derniers termes se détruisent, & que les autres sont divisibles par x , parvenir à l'équation $b+cx=3ffg+3fggx$, qui donne $x=\frac{b-3ffg}{3fg-g^3}$.

152.

Lorsqu'au contraire la formule proposée n'appartient à aucune des trois especes ci-dessus, on n'a d'autre ressource que de chercher à trouver une valeur qui change cette formule en un cube; ensuite ayant trouvé une telle valeur, par exemple, $x=h$, de sorte que $a+bh+chh+dh^3=k^3$, on suppose $x=h+y$, & substituant on trouve

a

 $bh+by$ $chh+2chy+cy^2$ $dh^2+3dhhy+3dhyy+dy^3$ $k^2+(b+2ch+3dhh)y+(c+3dh)yy+dy^2$

Cette nouvelle formule appartenant à la première espèce, on fait comment on doit déterminer y , & on trouvera par-là une nouvelle valeur de x , qu'on pourra faire servir ensuite à en trouver d'autres.

I 53.

Eclaircissions cette méthode par quelques exemples, & supposons d'abord qu'on demande que la formule $1+x+xx$, qui appartient à la première espèce, devienne un cube. Nous pourrions faire aussi-tôt la racine cubique $=1$, & nous trouverions $x+xx=0$, c'est-à-dire $x(1+x)=0$, & par conséquent, ou $x=0$ ou $x=-1$; mais nous ne pourrions rien conclure de-là. Ecrivons donc pour la racine cubique $1+px$, & comme le cube en est $1+3px$

$+3ppx^2+p^3x^3$, nous aurons $1=3p$ ou $p=\frac{1}{3}$; moyennant quoi les autres termes étant divisés par xx , donnent $1=3pp$

$+p^3x$, ou $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; or $p=\frac{1}{3}$; ainsi

$x=\frac{1-\frac{2}{27}}{\frac{1}{27}}=18$, & notre formule est $1+18$

$+324=343$, & la racine cubique, $1+px=7$. Si nous continuons à présent, en faisant $x=18+y$, notre formule prendra la forme $343+37y+yy$, & il faudra par la première règle en supposer la racine cubique $=7+py$; en la comparant après cela avec le cube $343+147py+21ppyy+p^3y^3$, nous voyons qu'il faut faire $37=147p$, ou $p=\frac{37}{147}$; les autres termes donnent en ce cas l'équation $1=21pp+p^3y$,

d'où nous tirons la valeur de $y=\frac{1-21pp}{p^3}$

$=-\frac{340.121.147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653}$, qui peut

conduire de la même manière à de nouvelles valeurs.

154.

Soit proposé d'égaliser à un cube cette autre formule $2+xx$. Comme on trouve assez aisément le cas $x=5$, nous ferons aussi-tôt $x=5+y$, & nous aurons $27+10y+yy$; nous en supposons la racine cubique $=3+py$, ainsi la formule même $=27+27py+9ppyy+p^3y^3$, & nous aurons à faire $10=27p$, ou $p=\frac{10}{27}$; donc

$$1 = 9pp + p^3y; \text{ \& } y = \frac{1-9pp}{p^3} = \frac{19-9 \cdot 27}{1000} \\ = -\frac{4617}{1000}; \text{ \& } x = \frac{385}{1000}; \text{ par-là notre formule } \\ \text{devient } 2+xx = \frac{2146689}{1000000}, \text{ dont la racine } \\ \text{cubique ne peut manquer d'être } 3+py \\ = \frac{129}{100}.$$

155.

Voyons aussi si cette formule-ci, $1+x^3$, peut devenir un cube hors des cas évidens de $x=0$, & de $x=-1$. Nous remarquons d'abord que, quoique cette formule appartienne à la troisième espèce, la racine $1+x$ ne nous est cependant d'aucun

usage, parce que son cube $1+3x+3xx+x^3$, étant égal à la formule, donne $3x+3xx=0$, ou $x(1+x)=0$, c'est-à-dire de nouveau $x=0$, ou $x=-1$.

Que si nous voulions faire $x=-1+y$, nous aurions à transformer en cube la formule $3y-3yy+y^3$, qui appartient à la seconde espèce; ainsi supposant sa racine cubique $=p+y$, ou la formule même égale au cube $p^3+3ppy+3pyy+y^3$, nous aurions $-3=3p$ ou $p=-1$, & de-là l'équation $3y=p^3+3ppy=-1+3y$, qui donne $y=\frac{1}{0}$, ou infini; de sorte qu'on ne tire aucun parti non plus de cette seconde supposition. Il ne faut pas s'en étonner, & c'est en vain qu'on chercheroit d'autres valeurs pour x ; car il est démontré que la somme de deux cubes, comme $1+x^3$, ne peut jamais devenir un cube; ainsi, en faisant $1=1$, il est clair que la formule, $1+x^3$, ne peut devenir un cube que dans les cas que nous avons dit.

156.

On trouvera pareillement que la formule, $2+x^3$, ne peut devenir un cube que dans le cas $x=-1$. Cette formule appartient à la seconde espece; mais on ne peut y appliquer la regle donnée pour ce cas, parce que les termes moyens manquent. C'est en supposant $x=-1+y$, ce qui donne $1+3y-3yy+y^3$, qu'on peut traiter la formule suivant tous les trois cas, & qu'on peut se convaincre de la vérité de ce que nous avançons. En effet, si dans le premier cas on fait la racine $=1+y$, dont le cube est $1+3y+3yy+y^3$, on a $-3yy=3yy$, ce qui ne peut être vrai que lorsque $y=0$. Qu'on suppose, d'après le second cas, la racine $=-1+y$, ou la formule $=-1+3y-3yy+y^3$, on aura $1+3y=-1+3y$, & $y=\frac{2}{3}$ ou une valeur infinie. Le troisième cas enfin exigeroit qu'on supposât la racine $1+y$, ce qu'on a déjà fait pour le premier.

157.

Soit proposée aussi la formule $3+3x^3$, qui doit devenir un cube: ce cas a lieu premièrement si $y=-1$, mais on n'en peut rien conclure, ensuite aussi quand $x=2$. Qu'on suppose, à cause de ce second cas, $x=2+y$, on aura la formule $27+36y+18yy+3y^3$; & comme elle est de la première espece, on fera sa racine $=3+py$, dont le cube est $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; comparant maintenant, on trouve $36=27p$ ou $p=\frac{4}{3}$, & de-là résulte l'équation $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, qui donne $y=\frac{-16}{17}$, & par conséquent $x=\frac{-10}{17}$. Donc notre formule $3+3x^3= -\frac{9261}{4913}$, & sa racine cubique $3+py=\frac{21}{17}$; & cette solution fournira de nouvelles valeurs, si l'on en souhaite.

158.

Considérons encore la formule $4+xx$, qui devient un cube dans deux cas qu'on

peut regarder comme connus, savoir $x=2$ & $x=11$. Si nous faisons d'abord $x=2+y$, ce sera la formule $8+4y+yy$ qui devra être un cube dont la racine soit $2+\frac{1}{3}y$, & ce cube étant $8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, nous trouvons $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$; donc $y=9$ & $x=11$, c'est-à-dire le second cas donné.

Si nous supposons à présent $x=1+y$, nous avons $125+22y+yy$, ce qui étant égalé au cube de $5+py$, ou à $125+75py+15p^2yy+p^3y^3$, donne $p=\frac{22}{25}$, & par-là $1=15pp+p^3y$, ou $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$, & par conséquent $y=-\frac{122625}{10648}$, & $x=-\frac{1497}{10648}$.

Puisque x peut également être négatif & positif, supposons $x=\frac{2+y}{1-y}$, & notre formule deviendra $\frac{8+8yy}{(1-y)^3}$, ce qui doit être un cube; multiplions donc les deux termes par $1-y$, afin que le dénominateur devienne un cube, & nous aurons $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, & ce ne sera plus que

le numérateur $8-8y+8yy-8y^3$, ou, en divisant par 8, que la formule $1-y+yy-y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Cette formule se rapportant à toutes les trois espèces, conformons-nous d'abord à la première, en prenant pour racine $1-\frac{1}{3}y$; le cube en est $1-y+\frac{1}{3}yy-\frac{1}{27}y^3$; ainsi nous avons $1-y=\frac{1}{3}-\frac{1}{27}y$, ou $27-27y=9-y$; donc $y=\frac{9}{13}$; donc $1+y=\frac{22}{13}$ & $1-y=\frac{4}{13}$; donc $x=11$, comme auparavant.

On trouveroit le même résultat, en regardant la formule comme de la seconde espèce.

Enfin, si on vouloit s'en tenir à la troisième & prendre pour racine $1-y$, dont le cube est $1-3y+3yy-y^3$, on auroit $-1+y=-3+3y$, & $y=1$; ainsi $x=\frac{1}{2}$, ou infini, & par conséquent un résultat qui n'est de nul usage.

I 59.

Mais puisque nous connoissons déjà les deux cas, $x=2$ & $x=11$, nous pouvons

aussi faire $x = \frac{2+11y}{1+y}$; car, moyennant cela, si $y=0$, on a $x=2$; & si $y=\infty$, on a $x=+11$.

Soit donc $x = \frac{2+11y}{1+y}$, & notre formule devient $4 + \frac{4+44y+121y^2}{1+2y+y^2}$, ou

$\frac{8+52y+125y^2}{(1+y)^2}$; multiplions les deux

termes par $1+y$, afin que le dénominateur devienne un cube, & ce sera le numérateur $8+60y+177yy+125y^3$ qu'il s'agira de transformer en un cube. Si pour cet effet nous supposons la racine $=2+5y$, nous verrions disparaître non-seulement les deux premiers termes, mais aussi les derniers. Ce sera donc à la seconde espèce que nous rapporterons notre formule, en prenant pour racine $p+5y$; le cube en est $p^3+15ppy+75pyy+125y^3$; ainsi nous ferons $177=75p$, ou $p=\frac{19}{25}$, & il en résultera $8+60y=p^3+15ppy$, ou $=\frac{80379}{15625}$, & $y=\frac{80379}{567875}$, d'où l'on pourroit tirer une valeur de x .

Mais on peut supposer aussi $x = \frac{2+11y}{1-y}$, & dans ce cas notre formule devient

$$4 + \frac{4+44y+121y^2}{1-2y+yy} = \frac{8+36y+125y^2}{(1-y)^2};$$

de sorte qu'en multipliant les deux termes par $1-y$, on a $8+28y+89yy-125y^3$ à transformer en un cube. Si donc nous supposons, conformément au premier cas, la racine $=2+\frac{7}{3}y$, dont le cube est $8+28y+\frac{98}{3}yy+\frac{143}{27}y^3$, nous avons $89-125y=\frac{98}{3}+\frac{143}{27}y$, ou $\frac{1718}{27}y=\frac{169}{3}$, & par conséquent $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; d'où l'on tire $x=11$, c'est-à-dire une des valeurs déjà connues.

Mais considérons plutôt notre formule relativement au troisième cas, & supposons-en la racine $=2-5y$; le cube de ce binôme étant $8-60y+150yy-125y^3$, nous aurons $28+89y=-60+150y$; donc $y=\frac{88}{61}$, d'où l'on tire $x=-\frac{1090}{27}$; de sorte que notre formule devient $=\frac{1191016}{729}$, ou égale au cube de $\frac{106}{9}$.

160.

Voilà donc les méthodes dont on est en possession quant à présent, pour réduire

des formules telles que celles que nous avons considérées, soit à un carré, soit à un cube, pourvu que la plus haute puissance de l'inconnue ne passe pas le quatrième degré dans le premier cas, ni le troisième dans le second cas.

On pourroit ajouter encore la question de transformer une formule proposée en un carré-carré, dans le cas où l'inconnue ne passeroit pas le second degré. Mais on observera que si une formule, telle que $a+bx+cx^2$, doit être un carré-carré, il faut premièrement qu'elle soit un carré, après quoi il ne restera qu'à faire de la racine de ce carré un nouveau carré, par les règles que nous avons données pour cela. Que $xx+7$, par exemple, doive être un bi-carré, on fera d'abord un carré, en prenant $x=\frac{7pp-99}{2pp}$, ou bien aussi $x=\frac{99-7pp}{2pp}$; la formule alors devient égale au carré $\frac{9^4-1499pp+49p^4}{4pp99}+7$
 $=\frac{9^4+1499pp+49p^4}{4pp99}$, dont il faut trans-

former

former la racine $\frac{7pp+99}{2pp}$ pareillement en un carré; qu'on multiplie dans ce dessein les deux termes par $2pp$, afin que le dénominateur devenant un carré, on n'ait à traiter que le numérateur $2pp(7pp+99)$. On ne peut faire un carré de cette formule, qu'après avoir déjà trouvé un cas satisfaisant; ainsi supposant $p=7$, il faudra que la formule $2pp(7pp+pp(7))=2p^4(7+77)$, & par conséquent aussi, en divisant par p^4 , que la formule $2(7+77)$ devienne un carré. Le cas connu est ici $7=1$, c'est pourquoi on fera $7=1+y$, & on aura $(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3$, dont on supposera la racine $=4+\frac{1}{2}y$; le carré $16+20y+\frac{21}{4}yy$ étant égal à la formule, donne $6+2y=\frac{21}{4}$; donc $y=\frac{1}{2}$ & $7=\frac{9}{2}$. Or $7=\frac{9}{2}$; ainsi $p=9$ & $p=8$, ce qui rend $x=\frac{167}{144}$, & la formule $7+xx=\frac{279841}{20735}$. Si enfin on extrait la racine carrée de cette fraction, on trouve $\frac{529}{144}$, & tirant encore de celle-ci la racine carrée, on trouve $\frac{23}{12}$; donc c'est

Tome II.

N

de $\frac{21}{18}$ que la formule proposée est le carré-carré.

161.

Enfin nous avons à remarquer encore dans ce Chapitre, qu'il est des formules dont on peut faire des cubes d'une manière tout-à-fait générale; car si, par exemple, cxx doit être un cube, on n'a qu'à faire sa racine $= px$, & on trouve $cxx = p^3 x^3$, ou $c = p^3 x$, c'est-à-dire $x = \frac{c}{p^3}$, ou $x = cq^3$, en écrivant $\frac{1}{p^3}$ au lieu de p .

La raison en est évidemment que la formule contient un carré; c'est pourquoi toutes les formules, comme $a(b + cx)^2$, ou $abb + 2abcx + ac^2xx$, peuvent très-facilement se transformer en cubes. En effet, qu'on en suppose la racine cubique $= \frac{b+cx}{q}$, on aura l'équation $a(b+cx)^2 = \frac{(b+cx)^3}{q^3}$, qui, divisée par $(b+cx)^2$, donne $a = \frac{b+cx}{q^3}$; d'où l'on tire $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, valeur dans laquelle q est arbitraire.

Il est bien clair par-là combien il est utile de résoudre les formules proposées en leurs facteurs toutes les fois que cela est possible; & c'est donc une matière de laquelle nous croyons, avec raison, devoir traiter au long dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XI.

De la Résolution de la formule $axx + bxy + cyy$ en ses facteurs.

162.

LES lettres x & y ne signifieront ici que des nombres entiers; & nous avons vu suffisamment dans ce qui a précédé, & même lorsqu'il falloit se contenter de résultats fractionnaires, que la question peut toujours être ramenée à des nombres entiers. En effet si, par exemple, le nombre cherché x est une fraction, on n'a qu'à faire $x = \frac{t}{u}$, & on pourra toujours assigner t & u en nombres entiers; & comme cette

fraction peut se réduire à ses moindres termes, on regardera les nombres 1 & u comme n'ayant aucun commun diviseur.

Supposons donc que dans la formule présente x & y ne soient que des nombres entiers, & tâchons de déterminer quelles valeurs on doit donner à ces lettres, pour que la formule obtienne deux ou plusieurs facteurs; c'est une recherche préliminaire très-nécessaire, avant que nous puissions faire voir comment cette formule se transforme en un carré, un cube ou une puissance plus haute.

163.

Trois cas se présentent à considérer ici. Le premier, quand la formule se décompose réellement en deux facteurs rationnels, ce qui arrive, comme nous avons déjà vu plus haut, lorsque $bb-4ac$ devient un carré.

Le second cas est celui où ces deux facteurs sont égaux, & où par conséquent la formule est un carré.

Le troisième cas a lieu, quand la formule n'a que des facteurs irrationnels, soit qu'ils soient simplement irrationnels, soit qu'ils soient même imaginaires. Ils seront simplement irrationnels, lorsque $bb-4ac$ sera un nombre positif sans être un carré; ils seront imaginaires, si $bb-4ac$ est négatif.

164.

Si, pour commencer par le premier cas, nous supposons que la formule soit résoluble en deux facteurs rationnels, on pourra lui donner cette forme $(fx+gy)(hx+ky)$, qui renferme donc naturellement déjà deux facteurs. Voudra-t-on ensuite qu'elle contienne d'une manière générale un plus grand nombre de facteurs, on n'aura qu'à faire $fx+gy=pq$, & $hx+ky=rs$; notre formule deviendra dans ce cas égale au produit $pqrs$, elle contiendra par conséquent quatre facteurs, & on pourra augmenter ce nombre à volonté. Or nous obtenons par ces deux équations-là pour x une double valeur, savoir $x=\frac{pa-ry}{f}$ & $x=\frac{rf-hy}{h}$, ce qui

donne $hpq - hgy = frf - fky$, & par conséquent $y = \frac{fr - hpg}{fk - hg}$, & $x = \frac{pq - pf}{fk - hg}$; or si l'on veut que x & y soient exprimés en nombres entiers, il faudra donner aux lettres p, q, r & f des valeurs telles que le numérateur soit réellement divisible par le dénominateur; ce qui arrive lorsque soit p & r , soit q & f sont divisibles par ce dénominateur.

165.

Pour rendre tout cela plus clair, soit donnée la formule $xx - yy$, qui est composée des facteurs $(x+y)(x-y)$. Si cette formule doit être résolue en un plus grand nombre de facteurs, on fera $x+y=pq$, & $x-y=rf$, & on aura $x = \frac{pq+rf}{2}$, & $y = \frac{pq-rf}{2}$; or il faudra donc pour que ces valeurs deviennent des nombres entiers, que les deux nombres pq & rf soient ou tous deux pairs ou tous deux impairs.

Soit, par exemple, $p=7$, $q=5$, $r=3$ & $f=1$, on aura $pq=35$ & $rf=3$; donc $x=19$ & $y=16$; & de-là résulte $xx-yy$

$=105$, lequel nombre est composé en effet des facteurs $7.5.3.1$, de sorte que ce cas ne souffre aucune difficulté.

166.

Le second en souffre encore moins, savoir celui où la formule renfermant deux facteurs égaux, peut se représenter de cette manière, $(fx+gy)^2$, c'est-à-dire par un carré, qui ne peut avoir d'autres facteurs que ceux qui proviennent de la racine $fx+gy$, car si l'on fait $fx+gy=pqr$, la formule devient $=ppqrr$, & peut avoir par conséquent autant de facteurs que l'on veut. Il faut remarquer de plus que l'un seulement des deux nombres x & y est déterminé, & que l'autre peut se prendre à volonté; car $x = \frac{pq-rf}{f}$, & il est facile de donner à y une valeur telle que la fraction disparaisse.

La formule de cette espèce la plus aisée à traiter, est xx ; si l'on fait $x=pqr$, le carré xx renfermera trois facteurs carrés, savoir pp , qq & rr .

N iv

167.

On rencontre bien plus de difficultés en traitant le troisieme cas, qui est celui dans lequel notre formule ne peut se décomposer en deux facteurs rationnels; & il faut ici des artifices particuliers, afin de trouver pour x & y des valeurs telles que la formule renferme deux ou plusieurs facteurs.

Nous rendrons cependant cette recherche moins difficile, en observant que notre formule se transforme facilement en une autre, dans laquelle le terme moyen manque; car en effet on n'a qu'à supposer $x = \frac{c-by}{2a}$, pour avoir la formule suivante: $\frac{a-by+by}{4a} + \frac{by-by}{2a} + cyy = zz + \frac{(4ac-bb)yy}{4a}$. Ainsi nous omettrons aussi-tôt le terme moyen, nous considérerons la formule $axx + cyy$, & nous chercherons quelles valeurs on doit donner à x & à y , pour que cette formule se décompose en facteurs. On jugera facilement que cela dépend de la nature des nombres a & c ; aussi com;

mencerons-nous par quelques formules déterminées de cette espece.

168.

Soit donc proposée d'abord la formule $xx + yy$, qui comprend tous les nombres qui sont la somme de deux quarrés, & dont nous allons mettre les plus petits sous les yeux; savoir ceux qui sont compris entre 1 & 50:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50.

On voit qu'il se trouve parmi ces nombres quelques nombres premiers qui n'ont point de diviseurs; ce sont ceux-ci: 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41. Les autres ont des diviseurs, & ils rendent plus claire la question: Quelles valeurs on doit adopter pour x & y , afin que la formule $xx + yy$ ait des diviseurs ou des facteurs, & qu'elle ait même autant de ces facteurs que l'on voudra? Nous remarquerons de plus qu'on peut faire abstraction des cas où x & y ont un

commun diviseur, parce qu'alors $xx+yy$ seroit divisible par le même diviseur, & même par son carré; par exemple, si $x=7p$ & $y=7q$, la somme des carrés, ou $49pp+49qq=49(pp+qq)$, sera divisible non-seulement par 7, mais aussi par 49. C'est pourquoi nous n'entendrons la question qu'à des formules où x & y n'ont aucun commun diviseur.

On voit facilement à présent en quoi gît la difficulté; car si d'un côté il est clair que, lorsque les deux nombres x & y sont impairs, la formule $xx+yy$ devient un nombre pair, & par conséquent divisible par 2, il est souvent d'autant moins aisé de savoir si la formule a des diviseurs ou si elle n'en a pas, lorsque de l'autre côté un des nombres x & y étant pair & l'autre impair, la formule elle-même devient impaire. Nous ne parlons pas du cas où x & y seroient pairs, parce que nous avons déjà fait sentir que ces nombres ne doivent point avoir de commun diviseur.

169.

Que les deux nombres x & y soient donc premiers entr'eux, & que cependant la formule $xx+yy$ doive contenir deux ou plusieurs facteurs. La méthode précédente ne peut s'appliquer ici, parce que la formule n'est pas résoluble en deux facteurs rationnels; mais les facteurs irrationnels qui composent la formule, & qu'on peut représenter par le produit $(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})$, nous rendront le même service. En effet, on sent bien que si la formule $xx+yy$ a des facteurs réels, il faut que ces facteurs irrationnels soient composés d'autres facteurs; parce que s'ils n'avoient pas aussi des diviseurs, leur produit ne pourroit pas non plus en avoir. Or comme ces facteurs sont irrationnels, & même imaginaires, & que de plus les nombres x & y ne doivent point avoir de commun diviseur, ils ne peuvent renfermer des facteurs rationnels, & il faut qu'ils soient pareillement irrationnels, & même imaginaires.

170.

Si l'on veut donc que la formule $xx+yy$ ait deux facteurs rationnels, il faudra décomposer chacun des deux facteurs irrationnels en deux autres facteurs; c'est pourquoi, supposons d'abord $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+f\sqrt{-1})$; & puisque $\sqrt{-1}$ peut se prendre aussi bien en *moins* qu'en *plus*, nous aurons en même temps $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-f\sqrt{-1})$; prenons maintenant le produit de ces deux quantités, & nous verrons que notre formule $xx+yy=(pp+qq)(rr+ff)$, c'est-à-dire qu'elle contient les deux facteurs rationnels $pp+qq$ & $rr+ff$.

Il nous reste à présent à déterminer les valeurs de x & de y , qui doivent de même être rationnelles; or la supposition que nous avons faite, donne $x+y\sqrt{-1}=pr-qf$ $+pf\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$, & $x-y\sqrt{-1}=pr-qf-qr\sqrt{-1}-pf\sqrt{-1}$; si nous ajoutons ces formules, nous avons $x=pr-qf$; si nous les soustrayons l'une de l'autre, nous

trouvons $2y\sqrt{-1}=2pf\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, ou $y=pf+qr$.

Il s'ensuit par conséquent de-là, qu'en faisant $x=pr-qf$ & $y=pf+qr$, notre formule $xx+yy$ ne peut manquer d'obtenir deux facteurs, puisqu'on trouve $xx+yy=(pp+qq)(rr+ff)$. Que si l'on demandoit après cela un plus grand nombre de facteurs, on n'auroit qu'à donner de la même manière à p & à q des valeurs telles que $pp+qq$ eût deux facteurs; on auroit alors trois facteurs en tout, & ce nombre pourroit être augmenté par la méthode autant qu'on voudroit.

171.

Comme nous n'avons rencontré dans cette solution que les secondes puissances de p , q , r & f , on peut prendre aussi ces lettres en *moins*; que q , par exemple, soit négatif, on aura $x=pr+qf$ & $y=pf-qr$; mais la somme des carrés sera la même qu'auparavant, ce qui nous fait voir que quand un nombre est égal à un produit tel

que $(pp+qq)(rr+ff)$, on peut de deux façons le décomposer en deux quarrés; car nous avons trouvé d'abord $x=pr-qs$ & $y=ps+qr$, & après cela aussi $x=pr+qs$ & $y=ps-qr$.

Soit, par exemple, $p=3$, $q=2$, $r=2$ & $s=1$, on aura le produit $13.5=65=xx+yy$, où $x=4$ & $y=7$, comme $x=8$ & $y=1$; puisque dans l'un & l'autre cas $xx+yy=65$. Si l'on multiplie plusieurs nombres de cette espece, on aura aussi un produit qui pourra être d'un plus grand nombre de façons la somme de deux quarrés. Qu'on multiplie, par exemple, $2^2+1^2=5$, $3^2+2^2=13$, & $4^2+1^2=17$, on trouvera 1105, lequel nombre peut se décomposer en deux quarrés de quatre manieres, comme on va voir:

I.) 33^2+4^2 , II.) 32^2+9^2 , III.) 31^2+12^2 ,

IV.) 24^2+23^2 .

172.

Parmi les nombres qui sont contenus dans la formule $xx+yy$, se trouvent donc

premièrement ceux qui sont, par la multiplication, le produit de deux ou de plusieurs nombres; en second lieu ceux qui sont formés différemment. Nous nommons ces derniers *facteurs simples* de la formule $xx+yy$, & les premiers *facteurs composés*. D'après cela les facteurs simples seront des nombres tels que les suivans:

1, 2, 5, 9, 13, 17, 29, 37, 41, 49, &c. & on distinguera dans cette suite deux especes de nombres; les uns sont les nombres premiers; 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, qui n'ont aucun diviseur, & qui tous, excepté le nombre 2, sont tels que si l'on en ôte 1, le reste se trouve divisible par 4; de sorte que tous ces nombres sont contenus dans l'expression $4n+1$. La seconde espece comprend les nombres quarrés 9, 49, &c. & on remarquera que les racines de ces quarrés, savoir 3, 7, &c. ne se trouvent pas dans la suite, & que ces racines sont contenues dans la formule $4n-1$. Il est clair d'ailleurs qu'aucun nombre de la forme $4n-1$ ne peut être la somme de

deux carrés; car puisque ces nombres sont impairs, il faudroit que l'un des deux carrés fût pair & que l'autre fût impair; or nous avons vu plus haut que tous les carrés pairs sont divisibles par 4, & que les carrés impairs sont contenus dans l'expression $4n+1$; si donc on ajoute un carré pair & un carré impair, la somme aura toujours la forme de $4n+1$, & jamais de $4n-1$. Que tout nombre premier au reste qui appartient à la formule $4n+1$, est la somme de deux carrés; c'est une vérité indubitable, mais qui n'est pas tant aisée à démontrer.

173.

Allons plus loin, & considérons la formule $xx+2yy$, dans le dessein de voir quelles valeurs il faut donner à x & à y , afin qu'elle ait des facteurs. Comme cette formule s'exprime par les facteurs imaginaires $(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2})$, on voit, ainsi qu'auparavant, que si elle a des diviseurs, ces facteurs imaginaires doivent

pareillement

pareillement en avoir. Qu'on suppose donc $x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+f\sqrt{-2})$, d'où s'ensuit de soi-même $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-f\sqrt{-2})$, & on aura $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ff)$; ainsi cette formule a deux facteurs, desquels l'un & l'autre ont la même forme. Mais il reste à déterminer les valeurs de x & de y , qui produisent cette transformation; on considérera, pour y parvenir, que, puisque $x+y\sqrt{-2}=pr-2qf+qr\sqrt{-2}+pf\sqrt{-2}$, & que $x-y\sqrt{-2}=pr-2qf-qr\sqrt{-2}-pf\sqrt{-2}$, on a la somme $2x=2pr-4qf$, & par conséquent $x=pr-2qf$, & qu'on a de plus la différence $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2pf\sqrt{-2}$; de sorte que $y=qr+pf$. Lors donc que notre formule $xx+2yy$ doit avoir des facteurs, ils seront toujours des nombres de la même espèce que la formule, c'est-à-dire que l'un aura la forme $pp+2qq$, & l'autre la forme $rr+2ff$; & afin que ce cas ait lieu, x & y pourront encore se déterminer de deux manières différentes, à cause que q

Tome II.

O

peut être également négatif & positif; car on aura d'abord $x=pr-2qf$, & $y=pf+qr$, & en second lieu $x=pr+2qf$ & $y=pf-qr$.

I 74.

Cette formule $xx+2yy$ renferme donc tous les nombres qui résultent de l'addition d'un carré & du double d'un autre carré; & voici l'énumération de ces nombres poussée jusqu'au nombre 50:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17,
18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34,
36, 38, 41, 43, 44, 49, 50.

Nous diviserons, comme auparavant, ces nombres en simples & composés; les simples, ou ceux qui ne sont pas composés des nombres précédens, sont ceux-ci: 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49, qui tous, excepté les carrés 25 & 49, sont des nombres premiers; & il faut remarquer qu'en général, si un nombre est premier & ne se trouve pas dans cette suite, on est sûr d'y rencontrer son carré. On

peut observer aussi que tous les nombres premiers qui sont contenus dans notre formule, appartiennent tous soit à l'expression $8n+1$, soit à $8n+3$, tandis que tous les autres nombres premiers, savoir ceux qui sont compris dans les formules $8n+5$ & $8n+7$, ne peuvent jamais former la somme d'un carré & d'un double carré; il est de plus très-certain que tous les nombres premiers qui sont contenus dans une des autres formules, $8n+1$ & $8n+3$, sont toujours résolubles en un carré joint au double d'un carré.

I 75.

Passons à l'examen de la formule générale $xx+cyy$, & voyons moyennant quelles valeurs de x & de y on peut la transformer en un produit de facteurs.

Nous procéderons comme ci-dessus; nous représenterons la formule par le produit $(x+yy\sqrt{-c})(x-yy\sqrt{-c})$, & nous exprimerons pareillement chacun de ces facteurs par deux facteurs de la même

O ij

espece; c'est-à-dire que nous ferons $x+y\sqrt{-c}=(p+qr\sqrt{-c})(r+f\sqrt{-c})$ & $x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})(r-f\sqrt{-c})$; de-là résulte $xx+cy=(pp+cqq)(rr+cff)$, & l'on voit donc que de nouveau les facteurs sont de la même espece que la formule. Quant aux valeurs de x & de y , on trouvera de même facilement $x=pr+qf$ & $y=qr+pf$, ou bien aussi $x=pr-qf$, & $y=pf-qr$, & il est aisé d'imaginer comment la formule peut se résoudre en un plus grand nombre de facteurs.

176.

Il sera facile maintenant de procurer aussi des facteurs à la formule $xx-cyy$; car d'abord on n'a qu'à écrire $-c$ au lieu de $+c$; mais de plus on peut les trouver immédiatement de la manière suivante: comme notre formule équivaut au produit $(x+y\sqrt{c})(x-y\sqrt{c})$, qu'on fasse $x+y\sqrt{c}=(p+q\sqrt{c})(r+f\sqrt{c})$, & $x-y\sqrt{c}=(p-q\sqrt{c})(r-f\sqrt{c})$, & on aura sur le champ $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-cff)$;

en sorte que cette formule est, de même que les précédentes, égale à un produit dont les facteurs lui ressemblent par la forme. Pour ce qui regarde les valeurs de x & de y , elles se trouveront pareillement être doubles; cela veut dire qu'on aura $x=pr+qf$ & $y=qr+pf$, & qu'on aura aussi $x=pr-qf$ & $y=pf-qr$. Que si on vouloit faire la preuve & voir si on obtiendrait par-là le produit qu'on a trouvé, on auroit, en essayant les premières valeurs, $xx=pprr+2cpqrf+ccqgff$, & $yy=ppff+2pqrf+qqrr$; ou $cyy=cppff+2cpqrf+ccqrr$; de sorte que $xx-cyy=pprr-cppff+ccqgff-cqrr$, ce qui n'est autre chose que le produit trouvé, $(pp-cqq)(rr-cff)$.

177.

Jusqu'à présent nous avons considéré le premier terme sans coefficient; mais nous allons supposer à présent que ce terme soit pareillement multiplié par une autre lettre, & nous chercherons quels facteurs la formule $axx+cy$ peut obtenir.

O iii

Il est évident ici que notre formule est égale au produit $(x\sqrt{a+cy}\sqrt{-c})(x\sqrt{a-y}\sqrt{-c})$, & il s'agit par conséquent de donner de même des facteurs à ces deux facteurs. Or il se présente en ce point une difficulté; car si l'on vouloit, d'après la méthode précédente, faire $x\sqrt{a+cy}\sqrt{-c} = (p\sqrt{a+q}\sqrt{-c})(r\sqrt{a+f}\sqrt{-c}) = apr - cgsf + pf\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, & $x\sqrt{a-y}\sqrt{-c} = (p\sqrt{a-q}\sqrt{-c})(r\sqrt{a-f}\sqrt{-c}) = apr - cgsf - pf\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$, on auroit $2x\sqrt{a} = 2apr - 2cgsf$, & $2y\sqrt{-c} = 2pf\sqrt{-ac} + 2qr\sqrt{-ac}$; c'est-à-dire qu'on trouveroit tant pour x que pour y des valeurs irrationnelles, lesquelles ne peuvent être admises ici.

178.

Mais cette difficulté peut se lever, & voici comment: Qu'on fasse $x\sqrt{a+cy}\sqrt{-c} = (p\sqrt{a+q}\sqrt{-c})(r\sqrt{a+f}\sqrt{-c}) = apr - cgsf + pf\sqrt{-ac} + qr\sqrt{-ac}$, & $x\sqrt{a-y}\sqrt{-c} = (p\sqrt{a-q}\sqrt{-c})(r\sqrt{a-f}\sqrt{-c}) = apr - cgsf - pf\sqrt{-ac} - qr\sqrt{-ac}$;

cette supposition donnera pour x & y les valeurs rationnelles suivantes: $x = pr - cgsf$ & $y = qr + apsf$; & notre formule, $axx + cyy$, aura les facteurs $(ap + cgsf)(pr + apsf)$, dont l'un seulement est de la même espèce que la formule, l'autre ayant une forme différente.

179.

Il ne laisse pas cependant d'y avoir une grande affinité entre ces deux formules, vu que tous les nombres qui sont contenus dans la première formule, si on les multiplie par un nombre compris dans la seconde, retombent dans la première. Nous avons aussi déjà vu que deux nombres de la seconde forme $xx + acyy$, laquelle revient à la formule $xx + cyy$ que nous avons considérée, étant multipliés l'un par l'autre, redonnent un nombre de la même forme.

Il ne nous reste donc qu'à examiner à quelle formule appartient le produit de deux nombres de la première espèce, ou de la forme $axx + cyy$.

O iv

Multiplions, dans cette vue, les deux formules $(app+cgq)(arr+cff)$, qui sont de la premiere espece; il est aisé à voir que ce produit pourra être représenté de cette manière: $(apr+cgf)^2+ac(pf-gr)^2$. Si donc nous supposons ici $apr+cgf=x$, & $pf-gr=y$, nous aurons la formule $xx+acyy$, qui est de la dernière espece. Il s'en suit de-là que deux nombres de la premiere espece $axx+cyx$, étant multipliés l'un par l'autre, le produit est un nombre de la seconde espece. Si nous indiquons les nombres de la premiere espece par I, & ceux de la seconde par II, nous pouvons indiquer de la manière abrégée qui suit les conclusions auxquelles nous venons d'arriver:

I.I donne II; I.II donne I; II.II donne II.

Et on voit par-là d'autant mieux ce qui doit en résulter, si on multiplie plus de deux de ces nombres; favoir que

I.I.I fait I; que I.I.II fait II; que I.II.II fait I.

Enfin que II.II.II fait II.

180.

Soit, pour éclaircir l'article précédent, $a=2$ & $c=3$, il en résultera deux especes de nombres, l'une contenue dans la formule $2xx+3yy$, l'autre comprise dans la formule $xx+6yy$. Or les nombres de la premiere poussés jusqu'à 50, sont

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

Et les nombres de la seconde espece, poussés de même jusqu'au nombre 50, sont

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Si donc nous multiplions maintenant un nombre de la premiere espece, par exemple 35, par un nombre de la seconde, supposons par 31, le produit 1085 fera sûrement compris dans la formule $2xx+3yy$; ou bien on peut trouver pour y un nombre tel que $1085-3yy$ soit le double d'un carré, ou $=2xx$; or cela arrive d'abord quand $y=3$, dans lequel cas $x=23$; en

second lieu, quand $y=11$, en sorte que $x=19$; en troisieme lieu, lorsque $y=13$, ce qui donne $x=17$; & enfin, en quatrieme lieu, quand $y=19$, d'où résulte $x=1$.

On peut partager ces deux especes de nombres, comme les autres, en nombres simples & en nombres composés; on donnera ce dernier nom à ceux qui sont composés de deux ou de plusieurs des nombres plus petits de l'une ou de l'autre espece; ainsi les nombres simples de la premiere espece seront ceux-ci: 2, 3, 5, 11, 29, & les nombres composés de la même espece, seront 8, 12, 14, 18, 20, 27, 30, 32, 35, 40, 45, 48, 50, &c.

Les nombres simples de la seconde espece seront 1, 7, 31, & tous les autres de cette espece seront des nombres composés, savoir 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.



CHAPITRE XII.

De la Transformation de la formule $axx + cyy$ en des quarrés & en des puissances plus élevées.

181.

Nous avons déjà vu plus haut qu'il est souvent impossible de réduire à des quarrés des nombres de la forme $axx + cyy$; mais toutes les fois que cela est possible, on peut transformer cette formule en une autre, dans laquelle $a=1$.

Par exemple, la formule $2pp - qq$ peut devenir un quarré, & comme elle peut aussi se représenter par $(2p+q)^2 - 2(p+q)^2$, on n'a qu'à faire $2p+q=x$ & $p+q=y$, & on parvient à la formule $xx - 2yy$, dans laquelle $a=1$ & $c=2$. C'est une semblable transformation qui a lieu toutes les fois que de telles formules peuvent devenir des quarrés. Ainsi quand il s'agit de transformer la formule $axx + cyy$ en un

quarré, ou en une puissance plus haute; mais paire, on peut, sans balancer, supposer $a=1$, & regarder les autres cas comme impossibles.

I 82.

Soit donc proposée la formule $xx+cy$, & qu'il s'agisse d'en faire un quarré. Comme elle est composée des facteurs $(x+y\sqrt{-c})$ $(x-y\sqrt{-c})$, il faut que ces facteurs soient ou des quarrés ou des quarrés multipliés par un même nombre. Car si le produit de deux nombres, par exemple, pq , doit être un quarré, il faut que $p=rr$ & $q=ff$; c'est-à-dire que chaque facteur soit de soi-même un quarré, ou bien que $p=mrr$ & $q=msf$, & qu'ainsi ces facteurs soient des quarrés multipliés l'un & l'autre par un même nombre. C'est pourquoi nous ferons $x+y\sqrt{-c}=m(p+q\sqrt{-c})$; il s'en suivra $x-y\sqrt{-c}=m(p-q\sqrt{-c})$, & nous aurons $xx+cy=mm(pp+cqq)$, ce qui est un quarré. Nous avons de plus, pour déterminer x & y , les équations $x+y\sqrt{-c}$

$=mpp+2mpq\sqrt{-c}-mcqq$, & $x-y\sqrt{-c}=mpp-2mpq\sqrt{-c}-mcqq$, dans lesquelles naturellement x équivaut à la partie rationnelle, & $y\sqrt{-c}$ à la partie irrationnelle; ainsi $x=mpp-mcqq$, & $y\sqrt{-c}=2mpq\sqrt{-c}$, ou $y=2mpq$, & ce sont ces valeurs de x & de y qui transforment l'expression $xx+cy$ en un quarré $mm(pp+cqq)$, dont la racine est $mpp+mcqq$.

I 83.

Si les nombres x & y ne doivent point avoir de diviseur commun, il faut supposer $m=1$. Alors, pour faire que $xx+cy$ devienne un quarré, on se contente de prendre $x=pp-cqq$ & $y=2pq$, ce qui rend la formule égale au quarré $pp+cqq$.

On peut aussi, au lieu de faire $x=pp-cqq$, supposer $x=cqq-pp$, vu que le quarré xx ne laisse pas d'être le même.

Les mêmes formules, au reste, ayant été trouvées plus haut par des voies toutes-à-fait différentes, il ne peut y avoir de

doute sur la justesse de la méthode que nous venons d'employer. En effet, si on veut que $xx+cy$ devienne un carré, par la méthode précédente on suppose la racine $=x+\frac{cy}{x}$, & on trouve $xx+cy = xx + \frac{2cxy}{x} + \frac{c^2y^2}{x^2}$; on efface les xx , on divise les autres termes par y , on multiplie par q , & on a $cqq = 2pqx + ppy$, ou $cqq - ppy = 2pqx$; divisant enfin par $2pq$ & par y , il en résulte $\frac{x}{y} = \frac{cqq-pp}{2pq}$. Or x & y devant, ainsi que p & q , n'avoir point de diviseur commun, il faut évaluer x au numérateur & y au dénominateur, & on obtient par-là les mêmes résultats que nous venons de trouver, savoir $x=cqq-pp$, & $y=2pq$.

184.

Cette solution est bonne, que le nombre c soit positif ou qu'il soit négatif; mais si de plus ce nombre a lui-même des facteurs, comme si c'étoit, par exemple, la formule $xx+acy$ qui dût devenir un carré, on auroit non-seulement la solu-

tion précédente, qui donne $x=cqq-pp$ & $y=2pq$, mais encore cette autre, $x=cqq-pp$ & $y=2pq$; car dans ce dernier cas on a, de même que dans l'autre, $xx+acy = cqq^2 + 2acppq + aap^2 = (cqq+app)^2$; ce qui a lieu aussi, quand on prend $x=app - cqq$, parce que le carré xx reste le même.

Cette nouvelle solution se trouve aussi par la dernière méthode, de la façon suivante.

Qu'on fasse $x+y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^2$, & $x-y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^2$, on aura $xx+acy = (app+cqq)^2$, & par conséquent $=\square$; de plus, à cause de $x+y\sqrt{-ac} = app+2pq\sqrt{-ac}-cqq$, & de $x-y\sqrt{-ac} = app-2pq\sqrt{-ac}-cqq$, on trouve $x=app-cqq$ & $y=2pq$.

Il est clair aussi que si le nombre ac est résolvable en deux facteurs d'un plus grand nombre de manières, on pourra trouver aussi un plus grand nombre de solutions.

185.

Eclairciffons tout cela au moyen de quelques formules déterminées; & d'abord, si c'est la formule $xx+yy$ qui doit devenir un carré, nous avons $ac=1$; ainsi $x=pp-qq$, & $y=2pq$, d'où s'ensuit $xx+yy=(pp+qq)^2$.

Si on veut que $xx-yy=\square$; on a $ac=-1$; ainsi on prendra $x=pp+qq$ & $y=2pq$, & il en résultera $xx-yy=(pp-qq)^2$.

Veut-on que la formule $xx+2yy=\square$, on a $ac=2$; qu'on prenne donc $x=pp-2qq$, ou $x=2pp-qq$ & $y=2pq$, & on aura $xx+2yy=(pp+2qq)^2$, ou $xx+2yy=(2pp+qq)^2$.

Si, en quatrième lieu, on veut que $xx-2yy=\square$, où $ac=-2$, on aura $x=pp+2qq$ & $y=2pq$; donc $xx-2yy=(pp-2qq)^2$.

Qu'on veuille enfin que $x+6yy=\square$, on aura $ac=6$, & par conséquent ou $a=1$ & $c=6$, ou $a=2$ & $c=3$; dans le premier

cas

cas $x=pp-6qq$, & $y=2pq$; de sorte que $xx+6yy=(pp+6qq)^2$; dans le second cas $x=2pp-3qq$, & $y=2pq$; d'où résulte $xx+6yy=(2pp+3qq)^2$.

186.

Mais si c'est maintenant la formule $axx+cyx$ qu'on doit transformer en un carré, comme nous avons prévenu que cela ne peut se faire que quand on connoît déjà un cas dans lequel cette formule devient réellement un carré, nous supposons que ce cas donné ait lieu, quand $x=f$ & $y=g$; de sorte qu'alors $aff+cgx=hh$; & nous remarquerons que cette formule peut se transformer en une autre de la forme $u+acuu$, si l'on fait $u=\frac{ax-cy}{h}$ & $u=\frac{cx-fy}{h}$; car en effet, si $u=\frac{affx+2acfyx+ccgyy}{hh}$, & que $uu=\frac{ggxx-2fgy-ffyy}{hh}$, on a $u+acuu=\frac{affx+2acfyx+ccgyy}{hh}+\frac{ggxx-2fgy-ffyy}{hh}=\frac{axx(aff+cg)+cyy(aff+cg)}{hh}$; ainsi, puisque $aff+cgx=hh$, on a $u+acuu=xxx+cyx$; or nous avons donné des règles faciles pour transformer en un carré

Tome II.

P

l'expression $xx+acuu$, à laquelle nous venons de réduire la formule proposée $xxx+cyx$.

187.

Allons à présent plus loin, & voyons comment la formule $xxx+cyx$, dans laquelle x & y sont supposés n'avoir aucun diviseur commun, peut se réduire à un cube. Les règles données plus haut ne suffisent aucunement pour cela, au lieu que la méthode que nous avons indiquée en dernier lieu s'applique ici avec le plus grand succès; & ce qui est sur-tout digne de remarque, c'est que la formule peut toujours être transformée en un cube, quelques nombres que soient a & c ; ce qui n'avoit point lieu pour les quarrés, à moins qu'on n'eût déjà un cas connu, & ce qui n'a de même point lieu pour aucune des autres puissances paires; la solution au contraire est toujours possible pour les puissances impaires, telles que la troisième, la cinquième, la septième, &c.

188.

Lors donc qu'il s'agira de réduire en cube la formule $xxx+cyx$, on supposera d'une manière analogue à celle qu'on a employée $x\sqrt{a+y}\sqrt{-c}=(p\sqrt{a+q}\sqrt{-c})^3$, & $x\sqrt{a-y}\sqrt{-c}=(p\sqrt{a-q}\sqrt{-c})^3$; le produit $(app+cqq)^3$, qui est un cube, sera égal à la formule $xxx+cyx$. Mais on cherche aussi à déterminer pour x & y des valeurs rationnelles, & heureusement on y réussit. En effet, si l'on prend réellement les deux cubes indiqués, on a les deux équations $x\sqrt{a+y}\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a+3appq}\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a-cq^3}\sqrt{-c}$, & $x\sqrt{a-y}\sqrt{-c}=ap^3\sqrt{a-3appq}\sqrt{-c}-3cpqq\sqrt{a+cq^3}\sqrt{-c}$, desquelles il suit évidemment que $x=ap^3-3cpqq$, & $y=3appq-cq^3$.

Qu'on cherche, par exemple, deux quarrés xx & yy , dont la somme $xx+yy$ fasse un cube. Puisqu'ici $a=1$ & $c=1$, on aura $x=p^3-3pq^2$, & $y=3ppq-q^3$, ce qui donne $xx+yy=(pp+qq)^3$. Main-

P ij

tenant si $p=2$ & $q=1$, on trouve $x=2$
& $y=1$; donc $xx+yy=125=5^3$.

189.

Considérons aussi la formule $xx+3yy$
dans le dessein de la faire égale à un cube:
comme nous avons pour cet effet $a=1$
& $c=3$, nous trouvons $x=p^3-9pqq$,
& $y=3ppq-3q^3$, d'où résulte $xx+3yy$
 $=(pp+3qq)^3$. Cette formule se présente
assez souvent: c'est une raison pour en
donner ici du moins les cas les plus fa-
ciles.

p	q	x	y	xx+3yy
1	1	8	0	64=4 ³
2	1	10	9	343=7 ³
1	2	35	18	2197=13 ³
3	1	0	24	1728=12 ³
1	3	80	72	21952=28 ³
3	2	81	30	9261=21 ³
2	3	154	45	29791=31 ³

190.

Sans la condition que les deux nombres
 x & y ne doivent point avoir de commun

diviseur, la question ne seroit sujette à au-
cune difficulté; car si $axx+cyy$ devoit
être un cube, on n'auroit qu'à faire $x=uz$
& $y=vz$, & la formule deviendrait auz
 $+cuuz$; on l'égaleroit au cube $\frac{z^3}{v^3}$, & on
trouveroit aussi-tôt $z=v'(au+cuu)$; par
conséquent les valeurs cherchées de x &
de y seroient $x=uv'(au+cuu)$, & $y=uv'$
 $(au+cuu)$, lesquelles ont, outre le cube v^3 ,
aussi la quantité $au+cuu$ pour commun
diviseur; de sorte donc que cette solution
donne sur le champ $axx+cyy=v^3(au$
 $+cuu)^3(au+cuu)=v^3(au+cuu)^3$, ce qui
est évidemment le cube de $v'(au+cuu)$.

191.

La méthode dont nous avons fait usage
en dernier lieu, est d'autant plus remar-
quable, que c'est par le moyen de quan-
tités irrationnelles & même imaginaires,
que nous sommes parvenus à des solutions
qui demandoient absolument des nombres
rationnels & même entiers. Mais ce qui est

encore plus digne d'attention, c'est que dans les cas où l'irrationalité s'évanouit, notre méthode ne peut plus avoir lieu. En effet lorsque, par exemple, la formule $xx + yy$ doit être un cube, on ne peut qu'en inférer que ses deux facteurs irrationnels, $x + y\sqrt{-c}$ & $x - y\sqrt{-c}$, doivent pareillement être des cubes, vu que x & y n'ayant point de diviseur commun, ces facteurs ne peuvent pas non plus en avoir. Mais si les radicaux disparaissent, comme, par exemple, dans le cas de $c = -1$, ce principe n'auroit plus lieu; parce qu'il se pourroit très-bien que les deux facteurs, qui seroient alors $x + y$ & $x - y$, eussent des diviseurs communs, quand même x & y n'en auroient pas; ce qui arriveroit, par exemple, si ces deux lettres exprimoient des nombres impairs.

Ainsi, lorsque $xx = yy$ doit devenir un cube, il n'est pas nécessaire que tant $x + y$ que $x - y$ soient d'eux-mêmes des cubes; mais on pourra supposer $x + y = 2p^3$, & $x - y = 4q^3$; & la formule $xx + yy$ ne

laissera pas de devenir un cube incontestablement, puisqu'on la trouvera $= 8p^3q^3$, dont la racine cubique est $2pq$. On aura de plus $x = p^3 + 2q^3$, & $y = p^3 - 2q^3$. Lorsqu'au contraire la formule $xxx + cyy$ n'est pas résoluble en deux facteurs rationnels, on ne pourra trouver d'autres solutions que celles qui ont été données.

192.

Nous éclaircirons les recherches qui précèdent par quelques questions curieuses.

Question première. On demande un carré xx en nombres entiers, & tel qu'en y ajoutant 4, la somme soit un cube; le cas a lieu pour $xx = 121$, mais on veut savoir s'il y a d'autres cas semblables?

Comme 4 est un carré, on cherchera d'abord les cas où $xx + yy$ devient un cube; or nous en avons trouvé un qui a lieu, si $x = p^3 - 3ppq$, & $y = 3ppq - q^3$. Puis donc que $yy = 4$, on a $y = \pm 2$, & par conséquent ou $3ppq - q^3 = +2$, ou $3ppq - q^3 = -2$; dans le premier cas on a donc

$q(3pp - qq) = 2$; ainsi q est un diviseur de 2.

Cela posé, supposons premièrement $q = 1$; nous aurons $3pp - 1 = 2$; donc $p = 1$, d'où se dérivent $x = 2$ & $xx = 4$.

Si nous supposons en second lieu $q = 2$, nous avons $6pp - 8 = \pm 2$; que si nous admettons le signe $+$, nous trouvons $6pp = 10$ & $pp = \frac{5}{3}$, d'où résulteroit une valeur de p irrationnelle, & qui ne peut avoir lieu ici; mais si nous considérons le signe $-$, nous avons $6pp = 6$ & $p = 1$; donc $x = 1$. Voilà les seuls cas possibles, & ce ne sont donc que les deux carrés 4 & 1 qui, ajoutés à 4, donnent des cubes.

193.

Question deuxième. On cherche en nombres entiers d'autres carrés que 25, qui, ajoutés à 2, donnent des cubes.

Puis donc que $xx + 2$ doit devenir un cube, & puisque 2 est le double d'un carré, déterminons d'abord les cas où la formule $xx + 2yy$ devient un cube; nous avons

pour cet effet, par l'article 188, où $a = 1$ & $c = 2$; nous avons, dis-je, $x = p - 6pq$ & $y = 3ppq - 2q^2$; il faut donc, à cause de $y = \pm 1$, que $3ppq - 2q^2$, ou $q(3pp - 2q) = \pm 1$, & par conséquent que q soit un diviseur de 1.

Soit donc $q = 1$, & nous aurons $3pp - 2 = \pm 1$; si nous prenons le signe supérieur, nous trouvons $3pp = 3$ & $p = 1$, d'où résulte $x = 5$; & si nous adoptons l'autre signe, nous parvenons à une valeur de p , qui étant irrationnelle; ne nous est d'aucun usage; il s'ensuit donc qu'il n'y a pas de carré, hors 25, qui ait la propriété désirée.

194.

Question troisième. On cherche des carrés qui, multipliés par 5 & ajoutés à 7, produisent des cubes; ou bien on demande que $5xx + 7$ soit un cube.

Qu'on cherche premièrement les cas où $5xx + 7yy$ devient un cube; on trouvera par l'article 188, où $a = 5$ & $c = 7$, qu'il faut pour cela que $x = 5p - 21pq$, &

que $y = 15pq - 7q'$; ainsi comme dans notre exemple $y = \pm 1$, on a $15pq - 7q' = q(15p - 7q) = \pm 1$, il faut donc que q soit un diviseur de 1, c'est-à-dire que $q = 1$; on aura par conséquent $15p - 7 = \pm 1$, d'où résulteront, dans l'un & l'autre cas, des valeurs de p qui sont irrationnelles; mais d'où il ne faut pas conclure cependant que la question est impossible, vu que p & q pourroient être des fractions telles que $y = 1$ & que x devint un nombre entier; & c'est ce qui arrive réellement; car si $p = \frac{1}{2}$ & $q = \frac{1}{2}$, on trouve $y = 1$ & $x = 2$; mais il est vrai qu'il n'y a pas d'autres fractions qui rendent la solution possible.

195.

Question quatrième. On demande en nombres entiers des carrés dont le double, diminué de 5, soit un cube; ou bien on veut que $2xx - 5$ soit un cube.

Si nous commençons par chercher les cas qui satisfont pour la formule $2xx - 5yy$, nous avons dans le 188^e. article $a = 2$, &

$e = -5$; ainsi $x = 2p' + 15pq$, & $y = 6pq + 5q'$. Présentement il faut ici que $y = \pm 1$, & par conséquent $6pq + 5q' = q(6p + 5q) = \pm 1$; & comme cela ne se peut ni en nombres entiers ni même en fractions, ce cas devient très-remarquable, parce qu'il y a néanmoins une valeur de x qui satisfait, savoir $x = 4$; en effet dans ce cas $2xx - 5 = 27$, ou égal au cube de 3. Il est important de rechercher la raison de cette singularité.

196.

Non-seulement il est possible, comme nous voyons, que la formule $2xx - 5yy$ soit un cube; mais ce qui plus est, la racine de ce cube a la forme $2pp - 5qq$, comme on peut s'en convaincre en faisant $x = 4$, $y = 1$, & $p = 2$, $q = 1$; ainsi nous connoissons un cas où $2xx - 5yy = (2p - 5q)^2$, quoique les deux facteurs de $2xx - 5yy$, savoir $x\sqrt{2 + 5y}$, & $x\sqrt{2 - 5y}$, qui, suivant notre méthode, devroient être les cubes de $p\sqrt{2 + 5y}$, & de $p\sqrt{2 - 5y}$,

ne soient pas des cubes; car dans notre cas $x\sqrt{2+y\sqrt{5}}=4\sqrt{2+\sqrt{5}}$, au lieu que $(p\sqrt{2+q\sqrt{5}})^2=(2\sqrt{2+\sqrt{5}})^2=46\sqrt{2+29\sqrt{5}}$, ce qui n'est nullement identique avec $4\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Mais il faut remarquer que la formule $rr-10ff$ peut devenir 1 ou -1 en un nombre infini de cas; par exemple, si $r=3$ & $f=1$, si $r=19$ & $f=6$; & cette formule multipliée par $2pp-5qq$ reproduit un nombre de cette dernière forme.

Soit donc $ff-10gg=1$, & au lieu de supposer, comme nous avons fait ci-dessus, $2xx-5yy=(2p-5q)^2$, nous pourrions supposer d'une façon plus générale $2xx-5yy=(ff-10gg)(2p-5q)^2$; de sorte que prenant les facteurs, nous aurons $x\sqrt{2+y\sqrt{5}}=(f\sqrt{5}+g)(p\sqrt{2+q\sqrt{5}})$. Or $(p\sqrt{2+q\sqrt{5}})^2=(2p^2+15qq)\sqrt{2\pm(6pq+5q^2)}\sqrt{5}$; & si, pour abréger, nous écrivons $A\sqrt{2+B\sqrt{5}}$ à la place de cette quantité, & que nous multiplions par $f+g\sqrt{5}$, nous aurons $Af\sqrt{2+B\sqrt{5}}+2Ag\sqrt{5}+fBg\sqrt{2}$ à éga-
ler à $x\sqrt{2}$

$+y\sqrt{5}$, d'où résulte $x=Af+5Bg$, & $y=Bf+2Ag$; or, puisqu'il faut que $y=\pm 1$, il n'est pas absolument nécessaire que $6pq+5q^2=1$; au contraire il suffit que la formule $Bf+2Ag$, c'est-à-dire que $f(6pq+5q^2)+2g(2p^2+15qq)$ devienne ± 1 ; de sorte que f & g peuvent avoir plusieurs valeurs. Soit, par exemple, $f=3$ & $g=1$, il faudra que la formule $18pq+15q^2+4p^2+30pqq$ devienne ± 1 , ou bien que $4p^2+18pq+30pq+15q^2=\pm 1$.

197.

Cette difficulté de déterminer tous les cas possibles de cette espèce, n'a lieu cependant que lorsque dans la formule $axx+cyx$ le nombre c est négatif; & la cause en est qu'alors cette formule, ou bien cette autre $xx-acyx$, qui en dépend, peut devenir $=1$; ce qui n'arrive jamais quand c est un nombre positif, parce que $axx+cyx$, ou $xx+acyx$, donne toujours de plus grands nombres, plus on donne de

grandes valeurs à x & à y . C'est pourquoi la méthode que nous venons d'expliquer, ne peut s'employer avec avantage que dans les cas où les deux nombres a & c ont des valeurs positives.

198.

Passons maintenant au quatrième degré, & commençons par observer que, si la formule $axx + cyy$ doit devenir un bi-quarré, il faut que $a=1$; car si ce nombre n'étoit pas un carré, il ne seroit pas même possible de transformer la formule en un carré; & si cela étoit possible, on pourroit aussi lui donner la forme $u + acuu$; c'est pourquoi nous n'étendrons la question qu'à cette dernière formule, qui revient à la précédente $xx + cyy$, dans la supposition de $a=1$. Cela posé, il s'agit de voir quelle doit être la nature des valeurs de x & de y , pour que la formule $xx + cyy$ devienne un carré-quarré. Or comme elle est composée des deux facteurs $(x+y\sqrt{-c})$ ($x-y\sqrt{-c}$), il faut que chacun de ces

facteurs soit aussi un carré-quarré de la même espèce; & on doit faire $x+y\sqrt{-c} = (p+q\sqrt{-c})^2$, & $x-y\sqrt{-c} = (p-q\sqrt{-c})^2$, d'où il résulte que la formule proposée devient égale au bi-quarré $(pp+qq)^2$. Quant aux valeurs de x & de y , elles se déterminent facilement par le développement qui suit:

$$x+y\sqrt{-c} = p^2 + 4p^2q\sqrt{-c} - 6ppqq + cq^2 - 4cpq^2\sqrt{-c},$$

$$x-y\sqrt{-c} = p^2 - 4p^2q\sqrt{-c} - 6ppqq + cq^2 + 4cpq^2\sqrt{-c};$$

$$\text{donc } x = p^2 - 6ppqq + cq^2, \text{ \& } y = 4p^2q - 4cpq^2.$$

199.

Ainsi, lorsque $xx + yy$ doit être un bi-quarré, comme actuellement $c=1$, nous avons $x = p^2 - 6ppqq + q^2$, & $y = 4p^2q - 4pq^2$; en sorte que $xx + yy = (pp + qq)^2$.

Supposons, par exemple. $p=2$ & $q=1$, & nous trouverons $x=7$ & $y=24$, d'où résulte $xx + yy = 625 = 5^4$.

Si $p=3$ & $q=2$, nous obtenons $x=19$
& $y=20$, ce qui donne $xx+yy=13^2$.

200.

Quelle que soit la puissance paire dans laquelle il s'agisse de transformer la formule $axx+cy$, il est toujours absolument nécessaire que cette formule puisse être réduite à un carré; mais il suffit pour cet effet qu'on connoisse un seul cas où cela arrive; car on pourra transformer la formule ensuite, comme nous avons vu, en une quantité de la forme $xx+acuu$, dans laquelle le premier terme xx n'est multiplié que par 1; de sorte qu'on peut la regarder comme étant contenue dans l'expression $xx+cy$; & c'est d'une manière toujours semblable qu'on peut donner à cette dernière expression la forme d'une sixième puissance ou d'une puissance paire plus haute quelconque.

201.

Cette condition n'est pas requise pour les puissances impaires; & quels que soient les nombres

nombres a & c , on pourra toujours transformer la formule $axx+cy$ en une puissance impaire quelconque. Qu'on demande, par exemple, la cinquième; on n'aura qu'à faire $x\sqrt{a+y\sqrt{-c}}=(p\sqrt{a+q\sqrt{-c}})^2$, & $x\sqrt{a-y\sqrt{-c}}=(p\sqrt{a-q\sqrt{-c}})^2$, & on obtiendra évidemment $axx+cy=(app+cgq)^2$; de plus, comme la cinquième puissance de $p\sqrt{a+q\sqrt{-c}}$ est $aap^5\sqrt{a+5aap^3q\sqrt{-c}-10acp^3qq\sqrt{a}-10acppq^3\sqrt{-c}+5ccp^3q^4\sqrt{a}+ccq^5\sqrt{-c}}$, on trouvera avec la même facilité $x=aap^5-10acp^3qq+5ccp^3q^4$, & $y=5aap^3q-10acppq^3+ccq^5$. Si donc on demande que la somme de deux carrés, ou $xx+yy$, soit en même temps une cinquième puissance, on aura $a=1$ & $c=1$; donc $x=p^5-10p^3qq+5p^3q^4$, & $y=5p^3q-10ppq^3+q^5$; & en faisant de plus $p=2$ & $q=1$, on trouvera $x=38$ & $y=41$; par conséquent $xx+yy=3125=5^5$.



CHAPITRE XIII.

De quelques Expressions de la forme $ax^4 + by^4$, qui ne sont pas réducibles à des quarrés.

202.

ON s'est donné beaucoup de peine pour trouver deux bi-quarrés, dont la somme ou la différence fût un quarré; mais inutilement, & même on est parvenu à la fin à démontrer que ni la formule $x^4 + y^4$, ni la formule $x^4 - y^4$, ne peuvent devenir des quarrés, si ce n'est dans les cas évidens où, dans la première, x ou $y = 0$, & où, dans la seconde, $y = 0$ ou $y = x$. La chose est d'autant plus remarquable, qu'on peut trouver, comme on l'a vu, une infinité de solutions, lorsqu'il ne s'agit que de simples quarrés.

203.

Nous allons donner la démonstration dont nous venons de parler, & afin de pro-

céder par ordre, nous remarquerons avant toutes choses que les deux nombres x & y peuvent être regardés comme premiers entr'eux. En effet, si ces nombres avoient un commun diviseur, de façon qu'on pût faire $x = dp$ & $y = dq$, nos formules deviendroient $d^4p^4 + d^4q^4$ & $d^4p^4 - d^4q^4$; ces formules, si elles étoient des quarrés, seroient des quarrés étant divisées par d^4 ; donc aussi les formules $p^4 + q^4$ & $p^4 - q^4$, dans lesquelles p & q n'ont plus de commun diviseur, seroient des quarrés; par conséquent il suffira de prouver que nos formules, dans le cas où x & y sont des nombres premiers entr'eux, ne peuvent devenir des quarrés, & notre démonstration s'étendra d'elle-même à tous les cas où x & y auroient des diviseurs communs.

204.

Nous commencerons donc par la somme de deux bi-quarrés, savoir par la formule $x^4 + y^4$, & en considérant x & y comme des nombres qui sont premiers entr'eux. Il

Q ij

s'agit de prouver que cette formule ne peut devenir un carré que dans les cas mentionnés ci-dessus; on va voir les raisonnemens que cette démonstration exige.

Si quelqu'un nioit la proposition, ce seroit soutenir qu'il peut y avoir des valeurs de x & de y telles que $x^2 + y^2$ fût un carré, quelque grandes qu'elles fussent, puisqu'il n'y en a pas de petites.

Or on peut faire voir clairement que si x & y avoient des valeurs satisfaisantes, on pourroit, quelque grandes que fussent ces valeurs, en déduire de moindres pareillement satisfaisantes, tirer de celles-ci des valeurs encore plus petites, & ainsi de suite. Puis donc qu'on ne connoît aucune valeur en petits nombres, excepté les deux cas ci-dessus qui ne menent pas plus loin, on peut aussi conclure avec assurance qu'il n'existe point de valeurs de x & de y de la nature de celles qu'on cherche, & pas même dans les plus grands nombres. La proposition avancée à l'égard de la différence de deux bi-carrés, $x^2 - y^2$, se

démontrera par le même principe, comme on le verra plus bas.

205.

Ce sont les points suivans qu'il faut considérer maintenant, si on veut se convaincre que $x^2 + y^2$ ne peut devenir un carré que dans les cas évidens dont nous avons parlé.

I.) Puisque nous supposons que x & y sont des nombres premiers entr'eux, c'est-à-dire, qui n'ont point de commun diviseur, il faut qu'ils soient ou impairs tous les deux, ou que l'un soit pair & que l'autre soit impair.

II.) Mais ils ne pourroient être impairs tous deux, à cause que la somme de deux carrés impairs ne peut jamais être un carré; car un carré impair est toujours contenu dans la formule $4n+1$, & par conséquent la somme de deux carrés impairs aura la forme $4n+2$, ce qui étant divisible par 2, mais non par 4, ne peut être un carré. Or ce que nous venons de dire doit

s'entendre aussi de deux bi-quarrés impairs.

III.) Si donc $x^4 + y^4$ doit être un quarré, il faut qu'un des termes soit pair, & que l'autre soit impair. Or nous avons vu plus haut que, pour que la somme de deux quarrés soit un quarré, il faut que la racine de l'un puisse être exprimée par $pp - qq$, & celle de l'autre par $2pq$; donc il faudroit que $xx = pp - qq$ & $yy = 2pq$, & on auroit $x^4 + y^4 = (pp + qq)^2$.

IV.) Ici par conséquent y seroit pair & x seroit impair; mais puisque $xx = pp - qq$, il faut aussi que des nombres p & q l'un soit pair & l'autre impair. Or le premier p ne peut être pair, parce que s'il l'étoit, $pp - qq$ seroit un nombre de la forme $4n - 1$ ou $4n + 3$, & ne pourroit devenir un quarré. Donc il faudroit que p fût impair & que q fût pair, & en ce cas il est clair que ces nombres seront premiers entr'eux.

V.) Pour que $pp - qq$ devienne un quarré ou $= xx$, il faut, comme nous avons vu plus haut, que $p = rr + ff$ & $q = 2rf$; car en ce cas $xx = (rr - ff)^2$ & $x = rr - ff$.

VI.) Or il faut que yy soit pareillement un quarré; & puisque nous avons $yy = 2pq$, nous aurons à présent $yy = 4rf(rr + ff)$; de sorte que cette formule doit être un quarré; donc il faut aussi que $rf(rr + ff)$ soit un quarré: & remarquons que r & f sont des nombres premiers entr'eux, de façon que les trois facteurs de cette formule, savoir r , f & $rr + ff$, n'ont point de commun diviseur.

VII.) Or, quand un produit de plusieurs facteurs qui n'ont point de diviseur commun, doit être un quarré, il faut que chaque facteur soit de lui-même un quarré; ainsi on fera $r = u$ & $f = uv$, & il faudra que $r^2 + u^2 = \square$.

Si donc $x^4 + u^4$ étoit un \square , notre formule, $r^2 + u^2$, qui est pareillement la somme de deux bi-quarrés, seroit de même un \square . Et il est bon d'observer ici que puisque $xx = r^2 - u^2$ & $yy = 4ruv(r^2 + u^2)$, les nombres r & u seront évidemment bien plus petits que x & y , vu que x & y se déterminent même par les quatrièmes puissances

de t & de u , & ne peuvent par conséquent que devenir bien plus grands que ces nombres.

VIII.) Il s'ensuit de-là que si on pouvoit assigner, quand même ce seroit en nombres très-grands, deux bi-quarrés, comme x^4 & y^4 , dont la somme fût un quarré, on pourroit en déduire une somme de deux bi-quarrés beaucoup plus petits, qui seroit pareillement un quarré; cette nouvelle somme en seroit trouver ensuite une autre de la même nature & encore plus petite, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvint à des nombres très-petits. Or une telle somme, en nombres très-petits, n'étant pas possible, il s'ensuit évidemment qu'il n'y en a aucune qu'on puisse exprimer par des nombres très-grands.

IX.) On pourroit objecter, à la vérité, qu'il existe une somme de l'espèce dont nous parlons, en nombres très-petits, savoir dans le cas dont nous avons fait mention, où l'un des deux bi-quarrés devient zéro; mais nous répondons qu'on n'arrivera certaine-

ment pas à ce cas, en revenant des nombres très-grands aux plus petits, suivant la méthode indiquée; car si dans la petite somme ou dans la somme réduite $-t^4 + u^4$, on avoit $t=0$ ou $u=0$, on auroit nécessairement $yy=0$ dans la grande somme; or c'est un cas qui n'entre point ici en considération.

206.

Passons à la seconde proposition, & prouvons aussi que la différence de deux bi-quarrés, ou $x^4 - y^4$, ne peut jamais devenir un quarré que dans les cas où $y=0$ & $y=x$.

I.) On peut regarder les nombres x & y comme premiers entr'eux, & par conséquent comme étant ou impairs tous les deux, ou l'un pair & l'autre impair. Or comme dans l'un & l'autre cas la différence de deux quarrés peut redevenir un quarré, il faudra considérer ces deux cas séparément.

II.) Supposons d'abord les deux nombres x & y impairs, & que $x=p+q$ & $y=p-q$, il faudra nécessairement que l'un des deux

nombres p & q soit impair, & que l'autre soit pair. Or nous avons $xx - yy = 4pq$, & $xx + yy = 2pp + 2qq$; donc notre formule $x^4 - y^4 = 4pq(2pp + 2qq)$; & ceci devant être un carré, il faut aussi que sa quatrième partie, $pq(2pp + 2qq) = 2pq(pp + qq)$, soit un carré; & puisque les facteurs de cette formule n'ont point de commun diviseur, à cause que si p est pair q est impair, chacun de ces facteurs, $2p$, q & $pp + qq$, doit être de soi un carré. Afin donc de faire en sorte que les deux premiers deviennent des carrés, qu'on suppose $2p = 4rr$ ou $p = 2rr$, & $q = ss$, où f doit être impair, & il faudra que le troisième facteur, $4r^4 + s^4$, soit pareillement un carré.

III.) Or, puisque $f^4 + 4r^4$ est la somme de deux carrés, dont le premier, f^4 , est impair, & dont l'autre, $4r^4$, est pair, qu'on fasse la racine du premier $ff = u - uu$, où f soit impair & u pair; & la racine du second, $2rr = 2uu$, ou $rr = uu$, où r & u sont premiers entr'eux.

IV.) Puis donc que $uu = rr$ doit être un carré, il faut que tant t que u soient des carrés. Qu'on suppose donc $t = mm$ & $u = nn$, en entendant par m un nombre impair, & par n un nombre pair, on aura $ss = m^4 - n^4$; de sorte qu'il faudroit de nouveau qu'une différence de deux bi-carrés, savoir $m^4 - n^4$, fût un carré. Or il est clair que ces nombres seroient bien plus petits que x & y , puisqu'ils sont moindres que r & f , qui sont eux-mêmes évidemment plus petits que x & y . Si donc une solution étoit possible dans de grands nombres, & que $x^4 - y^4$ fût un carré, il faudroit qu'il y en eût une aussi qui fût possible pour des nombres beaucoup plus petits; celle-ci devroit faire parvenir à une autre pour des nombres encore plus petits, & ainsi de suite.

V.) Or les nombres les plus petits, pour lesquels un tel carré peut se trouver, ont lieu dans le cas où un des bi-carrés est $= 0$, ou qu'il est égal à l'autre bi-carré. Dans le premier cas il faudroit que $n = 0$; donc $u = 0$, & de même $r = 0$, $p = 0$,

& enfin $x^m - y^n = 0$, ou $x^m = y^n$; ce qui est un cas, duquel il n'est pas question ici; que si $n = m$, on trouveroit $t = u$, ensuite $f = 0$, $q = 0$, & enfin aussi $x = y$, ce qui n'entre point ici en considération.

207.

On pourroit faire ici l'objection que, puisque m est impair & que n est pair, la dernière différence n'est plus semblable à la première, & qu'ainsi on ne peut en tirer des conclusions analogues pour des nombres plus petits. Mais il suffit que la première différence nous ait fait arriver à la seconde, & nous allons faire voir que $x^m - y^n$ ne peut non plus devenir un carré, quand l'un des bi-quarrés est pair & que l'autre est impair.

I.) D'abord si le premier x^m étoit pair, & que y^n fût impair, la chose seroit claire d'elle-même, puisqu'on auroit un nombre de la forme $4n + 3$, qui ne peut être un carré. Soit donc x impair & y pair, il faudra que $xx = pp + qq$, & $y = 2pq$, d'où résulte $x^m - y^n = p^m - 2ppq + q^m$

$= (pp - qq)^2$, où des deux nombres p & q l'un doit être pair & l'autre impair.

II.) Or $pp + qq = xx$ devant être un carré, on a $p = rr - ff$ & $q = 2rf$; donc $x = rr + ff$. Mais de-là résulte $yy = 2(rr - ff) \cdot 2rf$, ou $yy = 4rf(rr - ff)$, ce qui devant être un carré, le quart $rf(rr - ff)$, dont les facteurs sont premiers entr'eux, doit pareillement être un carré.

III.) Qu'on fasse donc $r = ut$ & $f = uv$, on aura le troisième facteur $rr - ff = t^2 - u^2$, qui devra de même être un carré; or comme ce facteur équivaut à la différence de deux bi-quarrés, qui sont beaucoup moindres que les premiers, la démonstration précédente est pleinement confirmée; & il est évident que si la différence de deux bi-quarrés pouvoit devenir égale au carré d'un nombre, quelque grand qu'on veuille le supposer, on pourroit, moyennant ce cas connu, parvenir à des différences de plus en plus petites, qui seroient de même réductibles à des carrés, sans cependant retomber dans les deux cas évidens, dont

nous avons parlé au commencement; donc il est impossible que la chose puisse avoir lieu même pour les plus grands nombres.

208.

La première partie de la démonstration précédente, savoir où x & y sont supposés impairs, peut s'abrégier de la manière suivante: si $x^2 - y^2$ étoit un carré, il faudroit qu'on eût $xx = pp + qq$ & $yy = pp - qq$, en entendant par p & q des nombres dont l'un soit pair & l'autre impair; moyennant cela on auroit $xy = p^2 - q^2$, & il faudroit par conséquent que $p^2 - q^2$ fût un carré; or c'est-là une différence de deux bi-carrés dont l'un est pair & dont l'autre est impair; & il a été prouvé dans la seconde partie de la démonstration, qu'une différence de cette nature ne peut devenir un carré.

209.

Nous avons donc prouvé ces deux propositions capitales, que ni la somme ni la différence de deux bi-carrés ne peut de-

venir un nombre carré, si ce n'est dans un petit nombre de cas tout-à-fait évidens.

Quelques formules donc qu'on veuille transformer en des carrés, si ces formules demandent qu'on réduise à un carré la somme ou la différence de deux bi-carrés, on peut prononcer que ces formules proposées sont pareillement impossibles. C'est ce qui arrive à l'égard de celles que nous allons indiquer.

I.) Il n'est pas possible que la formule $xy = p^2 - q^2$ devienne un carré; car puisque cette formule est la somme de deux carrés, il faudroit que $xx = pp - qq$, & $yy = 2pq$ ou $yy = pq$; or p & q étant des nombres premiers entr'eux, il faudroit que l'un & l'autre fût un \square . Si donc on fait $p = rr$ & $q = ff$, on aura $xx = r^2 - f^2$; c'est-à-dire qu'il faudroit que la différence de deux bi-carrés fût un carré; ce qui est impossible.

II.) Il n'est pas possible non plus que la formule $xy = 4x^2$ devienne un carré; car il faudroit dans ce cas que $xy = pp + qq$, & $yy = 2pq$; afin qu'on eût $xy = 4x^2$.

$\equiv (pp - qq)^2$; or pour que $xy = pq$, il faut que tant p que q soit un carré; & si on fait en conséquence $p = rr$ & $q = ss$, on a $xx = r^2 + s^2$; c'est-à-dire qu'il faudroit que la somme de deux bi-carrés pût devenir un carré, ce qui est impossible.

III.) Il est impossible aussi que la formule $4x^2 - y^2$ devienne un carré, parce qu'il faudroit en ce cas nécessairement que y fût un nombre pair; or si l'on fait $y = 2z$, on trouve que $4x^2 - 16z^2$, & par conséquent aussi la quatrième partie $x^2 - 4z^2$, devroit pouvoir se réduire à un carré; ce que nous venons de voir n'être pas possible.

IV.) La formule $2x^2 + 2y^2$ ne peut pas non plus se transformer en un carré; car, puisqu'il faudroit que ce carré fût pair, & par conséquent $2x^2 + 2y^2 = 4zz$, on auroit $x^2 + y^2 = 2z^2$, ou $2zz + 2xxyy = x^2 + 2xxyy + y^2 = \square$, ou pareillement $2zz - 2xxyy = x^2 - 2xxyy + y^2 = \square$. Ainsi, comme tant $2zz + 2xxyy$ que $2zz - 2xxyy$ deviendroient des carrés, il faudroit que

leur

leur produit $4x^2 - 4x^2y^2$, aussi bien que le quart de ce produit, ou $x^2 - x^2y^2$, fût un carré. Mais ce quart est la différence de deux bi-carrés; donc, &c.

V.) Enfin je dis aussi que la formule $2x^2 - 2y^2$ ne peut être un carré; car les deux nombres x & y ne peuvent être pairs tous deux, puisque s'ils l'étoient, ils auroient un diviseur commun; ils ne peuvent être non plus pair l'un & impair l'autre, puisqu'autrement une partie de la formule seroit divisible par 4, & l'autre seulement par 2, & qu'ainsi la formule entière ne seroit divisible que par 2; donc il faut que ces nombres x & y soient impairs tous les deux. Or si l'on fait à présent $x = p + q$, & $y = p - q$, un des nombres p & q sera pair, & l'autre sera impair; & puisque $2x^2 - 2y^2 = 2(xx + yy)(xx - yy)$, & que $xx + yy = 2pp + 2qq = 2(pp + qq)$, & que $xx - yy = 4pq$, notre formule se trouvera exprimée par $16pq(pp + qq)$, dont la seizième partie, ou $pq(pp + qq)$, devra être pareillement un carré. Mais ces facteurs sont premiers entre

Tome II.

R

eux ; ainsi chacun doit de son côté être un carré. Qu'on fasse donc les deux premiers $p=rr$ & $q=ff$, & le troisième devenant $=r^4+f^4$, ce qui ne peut être un carré, prouvera que la formule proposée ne peut pas non plus devenir un carré.

210.

On peut démontrer de même que la formule x^4+2y^4 ne devient jamais un carré ; voici l'ordre de cette démonstration :

I.) Le nombre x ne peut être pair, parce qu'il faudroit en ce cas que y fût impair ; & la formule ne seroit divisible que par 2 & non par 4 ; donc x doit être impair.

II.) Qu'on suppose donc la racine carrée de notre formule $=xx+\frac{2xy}{q}$, afin qu'elle devienne impaire, on aura $x^4+2y^4=x^4$

$+ \frac{4pxxy}{q} + \frac{4ppy^4}{qq}$, où les x^4 se détruisent ; en sorte qu'en divisant les autres termes par yy & multipliant par qq , on trouve $Apqxx+APPY=2qqxy$, ou $Apqxx=2qqxy$

$=APPY$, d'où l'on tire $\frac{2x}{y}=\frac{19-2p}{2q}$; c'est-à-dire $xx=qq-2pp$ & $yy=2pq$, qui sont les mêmes formules que nous avons déjà données plus haut.

III.) Ainsi $qq-2pp$ devoit être un carré, & c'est ce qui ne peut arriver, à moins qu'on ne fasse $q=rr+1ff$ & $p=2rf$, afin d'avoir $xx=(rr-2ff)^2$; or on auroit alors $4r(rr+2ff)=yy$; & il faudroit qu'aussi le quart $rf(rr+2ff)$ fût un carré, & par conséquent que r & f fussent chacun en particulier des carrés. Si donc on suppose $r=tt$ & $f=uu$, on trouvera le troisième facteur $rr+2ff=t^4+2u^4$, qui devoit être un carré.

IV.) Par conséquent si x^4+2y^4 étoit un carré, il faudroit aussi que t^4+2u^4 fût un carré ; & comme les nombres t & u seroient beaucoup moindres que x & y , on pourroit parvenir de la même manière à des nombres toujours plus petits. Or il est facile de se convaincre, par quelques essais, que la formule proposée n'est pas un carré de quelque petit nombre ; donc elle ne

l'est pas non plus d'un nombre même très-grand.

211.

Pour ce qui regarde au contraire la formule $x^4 - 2y^4$, il n'est pas possible de prouver qu'elle ne peut devenir un carré, & on trouve même par un raisonnement semblable au précédent, qu'il y a une infinité de cas où cette formule devient réellement un carré.

En effet, que $x^4 - 2y^4$ doive être un carré, nous venons de voir qu'en faisant $xx = pp + 2qq$ & $yy = 2pq$, on trouve $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Or $pp + 2qq$ doit donc devenir pareillement un carré, & c'est ce qui arrive, lorsque $p = rr - 2ff$ & $q = 2rf$, vu qu'on a dans ce cas $xx = (rr + 2ff)^2$. De plus il est à remarquer qu'on pourroit prendre pour le même effet $p = 2ff - rr$ & $q = 2rf$: nous ferons attention à l'un & à l'autre cas.

I.) Soit d'abord $p = rr - 2ff$ & $q = 2rf$, on aura $x = rr + 2ff$; & à cause de $yy = 2pq$, on aura maintenant $yy = 4rf(rr$

$- 2ff)$; de sorte que r & f doivent être des carrés. Qu'on fasse donc $r = uu$ & $f = vv$, on trouvera $yy = 4uu(vv - 2vv)$.

Ainsi $y = 2uv\sqrt{v^2 - 2v^2}$ & $x = r + 2v^2$; donc, lorsque $r = 2v^2$ est un carré, on trouvera aussi $x^4 - 2y^4 = \square$; mais quoique v & u soient des nombres plus petits que x & y , on ne peut conclure cependant, comme auparavant, que $x^4 - 2y^4$ ne peut être un carré, de ce qu'on parvient à une formule semblable en de moindres nombres; car $x^4 - 2y^4$ peut devenir un carré, sans qu'on parvienne à la formule $r = 2v^2$, comme on le verra en considérant le second cas.

II.) Soit donc $p = 2ff - rr$ & $q = 2rf$, on aura à la vérité; comme ci-devant, $xx = rr + 2ff$; mais on trouvera $yy = 2pq = 4rf(2ff - rr)$. Si l'on suppose maintenant $r = uu$ & $f = vv$, on obtient $yy = 4uu(vv - 2vv)$ ($2v^2 - v^2$), par conséquent $y = 2uv\sqrt{2v^2 - v^2}$ & $x = r + 2v^2$, moyennant quoi il est clair que notre formule $x^4 - 2y^4$ peut devenir

aussi un carré, quand la formule $2u^4 - t^4$ devient un carré. Or ce cas a lieu évidemment, quand $t=1$ & $u=1$; & nous obtenons par-là $x=3$ & $y=2$, & enfin $x^4 - 2y^4 = 81 - 2.16 = 49$.

III.) Nous avons aussi vu plus haut que $2u^4 - t^4$ devient un carré, lorsque $u=13$ & $t=1$, puisqu'alors $\sqrt{2u^4 - t^4} = 239$. Si nous substituons donc ces valeurs au lieu de t & de u , nous trouvons un nouveau cas pour notre formule, savoir $x=1+2.13^4=57123$, & $y=2.13.239=6214$.

IV.) De plus, dès qu'on a trouvé des valeurs de x & de y , on peut les substituer à t & à u dans les formules du n°. 1; & on obtiendra par ce moyen de nouvelles valeurs de x & de y .

Or nous venons de trouver $x=3$ & $y=2$; faisons donc, dans les formules n°. 1, $t=3$ & $u=2$, de sorte que $\sqrt{t^4 - 2u^4} = 7$, & nous aurons les nouvelles valeurs suivantes, $x=81+2.16=113$ & $y=2.3.2.7=84$; ainsi $xx=12769$, & y^4

$=163047361$; de plus $yy=7056$, & $y^4 = 49787136$; donc $x^4 - 2y^4 = 63473089$: la racine quarrée de ce nombre est 7967, & elle s'accorde parfaitement avec la formule adoptée au commencement, $pp-2qq$; car puisque $t=3$ & $u=2$, on a $r=9$ & $s=4$; donc $p=81-32=49$ & $q=72$, d'où résulte $pp-2qq=2401-10368 = -7967$.

CHAPITRE XIV.

Solutions de quelques Questions qui appartiennent à cette partie de l'Analyse.

212.

NOUS avons expliqué jusqu'ici les artifices qui se présentent dans cette partie de l'analyse, & qui peuvent être nécessaires pour résoudre quelque question que ce soit qui appartienne à cette partie; il nous reste à les mettre dans un plus grand jour, en joignant ici quelques-unes de ces questions avec leurs solutions.

R iv

213.

Première question. Trouver un nombre tel que, si on y ajoute ou qu'on en retranche l'unité, on obtienne dans l'un & l'autre cas un nombre carré.

Soit le nombre cherché $= x$, il faut que tant $x+1$ que $x-1$ soit un carré. Supposons pour le premier cas $x+1=pp$, nous aurons $x=pp-1$ & $x-1=pp-2$, ce qui devra pareillement être un \square . Que la racine en soit donc $p-q$, nous aurons $pp-2=pp-2pq+qq$, & par conséquent $p=\frac{qq+2}{2q}$, au moyen de quoi on obtient $x=\frac{q^4+4}{4qq}$, où l'on peut donner à q une valeur quelconque même fractionnaire.

Si nous faisons donc $q=\frac{r}{f}$, en sorte que $x=\frac{r^4+4f^4}{4rfff}$, nous aurons pour quelques petits nombres les valeurs qui suivent :

Si $r = 1$	2	1	3
& $f = 1$	1	2	1
on a $x = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{61}{16}$	$\frac{85}{16}$

214.

Seconde question. Trouver un nombre x tel que, si on y ajoute deux nombres quelconques, par exemple 4 & 7, on obtienne dans l'un & l'autre cas un carré.

Il faut d'après cet énoncé que les deux formules, $x+4$ & $x+7$, deviennent des carrés. Qu'on suppose donc la première $x+4=pp$, on aura $x=pp-4$, & la seconde deviendra $x+7=pp+3$, or cette formule devant aussi être un carré, soit sa racine $=p+q$, & on aura $pp+3=pp+2pq+qq$, d'où l'on tirera $p=\frac{3+qq}{2q}$, & par conséquent $x=\frac{9-22qq+q^4}{4qq}$. Si de plus on prend pour q une fraction $\frac{r}{f}$, on trouve pour x la valeur $\frac{9f^4-22rfff+r^4}{4rfff}$, dans laquelle on peut substituer à r & à f tous les nombres entiers qu'on veut.

Si l'on fait $r=1$ & $f=1$, on trouve $x=-3$; donc $x+4=1$ & $x+7=4$.

Que si l'on demandoit que x fût un

nombre positif, on pourroit faire $f=2$ & $3=1$, & on auroit $x=\frac{17}{16}$, moyennant quoi $x+4=\frac{121}{16}$, & $x+7=\frac{169}{16}$.

Si l'on fait $f=3$ & $r=1$, on a $x=\frac{13}{9}$, d'où résultent $x+4=\frac{169}{9}$ & $x+7=\frac{196}{9}$.

Veut-on que le dernier terme de la formule qui exprime x , surpasse le moyen, qu'on fasse $r=5$ & $f=1$, on aura $x=\frac{21}{25}$, & par conséquent $x+4=\frac{121}{25}$ & $x+7=\frac{196}{25}$.

215.

Troisième question. On cherche une valeur fractionnaire de x , telle qu'ajoutée à 1 ou soustraite de 1, elle donne dans l'un & l'autre cas un carré.

Puisque ce sont les deux formules $1+x$ & $1-x$ qui doivent devenir des carrés, qu'on suppose la première $1+x=pp$, on aura $x=pp-1$, & la seconde formule $1-x=2-pp$. Or comme cette formule-ci doit devenir un carré, & que ni le premier terme ni le dernier n'est un carré, il faudra tâcher de trouver un cas où la

formule devienne un \square ; on ne tarde pas à en appercevoir un, c'est celui de $p=1$. Qu'on fasse donc $p=1-q$, de sorte que $x=q q-2q$, notre formule $2-pp$ fera $=1+2q-q q$; & en supposant la racine $=1-qr$, on aura $1+2q-q q=1-2qr+q q r r$; ainsi $2-q=-2r+q r r$, & $q=\frac{2r+2}{r+1}$; de-là résulte $x=\frac{4r-4r^3}{(r+1)^2}$; & puisque r est une fraction, qu'on fasse $r=\frac{t}{u}$, on aura $x=\frac{4u^3-4t^3}{(u+u)^2}=\frac{4u(u-u)}{(u+u)^2}$, & il est clair que u doit être plus grand que t .

Soit donc, par exemple, $u=2$ & $t=1$, on trouvera $x=\frac{24}{25}$.

Soit $u=3$ & $t=2$, on aura $x=\frac{120}{169}$, & les formules $1+x=\frac{289}{169}$ & $1-x=\frac{49}{169}$, seront toutes deux des carrés.

216.

Quatrième question. Trouver des nombres x tels que, soit qu'on les ajoute à 10, soit qu'on les soustraie de 10, il en résulte des carrés.

Il s'agit donc de transformer en carrés les formules $10+x$ & $10-x$, & on pourroit le faire par la méthode qu'on vient d'employer; mais indiquons une autre voie pour y parvenir. On remarquera d'abord que le produit de ces deux formules, ou $100-xx$, doit pareillement devenir un carré; or son premier terme étant déjà un carré, il faut en supposer la racine $=10-px$, moyennant quoi on aura $100-xx=100-20px+ppxx$; donc $x=\frac{20p}{pp+1}$; or par-là ce n'est encore que le produit des deux formules qui devient un carré, & non pas chacune en particulier. Mais pourvu que l'une devienne un carré, l'autre sera nécessairement aussi un carré; or $10+x=\frac{10pp+10p+10}{pp+1}=\frac{10(pp+2p+1)}{pp+1}$, & puisque $pp+2p+1$ est déjà un carré; tout se réduit à ce qu'aussi la fraction $\frac{10}{pp+1}$, ou bien celle-ci $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$, soit un carré. Il faut pour cela seulement que $10pp+10$ soit un carré, & on a de nouveau besoin ici de trouver un cas où cela ait lieu. On remar-

quera qu'un tel cas est $p=3$; c'est pour-quoi on fera $p=3+q$, & on aura $100+60q+10q^2$. Que la racine de ceci soit $10+qt$, on aura l'équation finale $100+60q+10q^2=100+20qt+q^2t^2$, qui donne $q=\frac{60-20t}{t^2-10}$, au moyen de quoi on déterminera $p=3+q$, & $x=\frac{20p}{pp+1}$.

Soit $t=3$, on trouvera $q=0$ & $p=3$; donc $x=6$, & nos formules $10+x=16$ & $10-x=4$.

Mais si $t=1$, on a $q=-\frac{40}{9}$ & $p=-\frac{13}{9}$, ainsi $x=-\frac{234}{25}$; or il est indifférent de faire aussi $x=+\frac{234}{25}$, donc $10+x=\frac{484}{25}$ & $10-x=\frac{16}{25}$, quantités qui sont toutes deux des carrés.

217.

Remarque. Si on vouloit généraliser cette question en demandant pour un nombre quelconque a des nombres x , tels que tant $a+x$ que $a-x$ fussent des carrés, la solution deviendroit souvent impossible, savoir dans tous les cas où a ne seroit pas la somme de deux carrés. Or nous avons

déjà vu plus haut que depuis 1 jusqu'à 50
ce ne font que les nombres suivans qui font
les sommes de deux quarrés, ou qui font
contenus dans la formule $xx+yy$:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18,

20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37,

40, 41, 45, 49, 50.

Ainsi les autres nombres compris entre 1
& 50, & qui sont:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22,

23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38,

39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

ne peuvent se décomposer en deux quarrés;
par conséquent toutes les fois que a seroit
un de ces derniers nombres, la question
seroit impossible. La démonstration en est
facile. Soit $a+x=pp$ & $a-x=qq$, l'ad-
dition des deux formules donnera $2a=pp$
 $+qq$; donc il faut que $2a$ soit la somme
de deux quarrés; or si $2a$ est une somme
de cette espece, a en fera une semblable;
par conséquent, lorsque a n'est pas la somme
de deux quarrés, il sera toujours impos-
sible que $a+x$ & $a-x$ soient en même
temps des quarrés.

218.

Comme 3 n'est pas la somme de deux
quarrés, il suit de ce que nous avons dit,
que, si $a=3$, la question est impossible.
Mais on pourroit objecter qu'il y a peut-
être deux quarrés fractionnaires, dont la
somme est $=3$; nous répondons que cela
n'est pas possible non plus; car si 3 étoit
 $=\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}$, & qu'on multipliât par $qqss$,
on auroit $3qqss=ppss+qgrs$, où le second
membre, qui est la somme de deux quarrés,
seroit divisible par 3; or nous avons vu
plus haut qu'une somme de deux quarrés
ne peut avoir pour diviseurs que des nom-
bres qui soient eux-mêmes des sommes de
cette espece.

Il est vrai que les nombres 9 & 45 sont
divisibles par 3, mais ils sont divisibles aussi
par 9, & même chacun des deux quarrés
qui composent tant l'un que l'autre, est di-
visible par 9, vu que $9=3^2+0^2$, & 45
 $=6^2+3^2$; c'est donc un cas différent &
duquel il n'est pas question ici; & nous

pouvons donc nous en tenir à la conclusion, que si un nombre a n'est pas en nombres entiers la somme de deux carrés, il ne le fera pas non plus en fractions. Lorsqu'au contraire le nombre a est en nombres entiers la somme de deux carrés, il peut être d'une infinité de manières la somme de deux carrés en nombres fractionnaires; c'est ce que nous allons faire voir.

219.

Cinquième question. Décomposer en autant de manières qu'on voudra un nombre, qui est la somme de deux carrés, en une autre somme de deux carrés.

Soit $ff+gg$ le nombre proposé, & qu'on cherche deux autres carrés, par exemple xx & yy , dont la somme $xx+yy$ soit égale au nombre $ff+gg$. Il est clair d'abord que si x est ou plus grand ou plus petit que f , il faut qu'au contraire y soit ou plus petit ou plus grand que g . Qu'on fasse donc $x=f+p$ & $y=g-q$, on aura $ff+2fp+p^2+gg-2gq+q^2$
 $=ff$

$=ff+gg$, où les deux termes ff & gg se détruisent, après quoi il ne reste que des termes qui sont divisibles par 2. Ainsi on aura $2fp+pp-2gq+qq=0$, ou $pp+qq=2gq-2fp$; donc $q=\frac{2g-2f}{pp+qq}$, d'où l'on tire pour x & y les valeurs suivantes, $x=\frac{2fp+2g-pp}{pp+qq}$ & $y=\frac{2fg+2f(pp-q)}{pp+qq}$, dans lesquelles on peut adopter pour p & q tous les nombres possibles à volonté.

Que, par exemple, 2 soit le nombre proposé, en sorte que $f=1$ & $g=1$; on aura $xx+yy=2$; & à cause de $x=\frac{2g-2f}{pp+qq}$ & de $y=\frac{2fg+2f(pp-q)}{pp+qq}$, si on fait $p=2$ & $q=1$, on trouve $x=\frac{2}{5}$ & $y=\frac{7}{5}$.

220.

Sixième question. Si a est la somme de deux carrés, trouver des nombres x , tels que $a+x$ & $a-x$ deviennent des carrés.

Soit $a=13=9+4$, & qu'on fasse $13+x=pp$ & $13-x=qq$, on aura d'abord par l'addition $26=pp+qq$, ensuite par la soustraction, $2x=pp-qq$; il faut par conséquent que p & q soient tels que pp

$+qq$ devienne égal au nombre 26, qui est aussi la somme de deux carrés, savoir de $25+1$. Or puisqu'il s'agit en effet de décomposer 26 en deux carrés, dont le plus grand puisse exprimer pp , & le plus petit qq , on aura sur le champ $p=5$ & $q=1$, de sorte que $x=12$; mais l'on peut résoudre le nombre 26 encore d'une infinité de manières en deux carrés. Car puisque $f=5$ & $g=1$, si nous écrivons dans les formules de ci-dessus z & u au lieu de p & q , & p & q au lieu de x & y , nous trouvons $p=\frac{2u+5(uu-1)}{11+uu}$ & $q=\frac{10u+11-uu}{11+uu}$. Maintenant nous pouvons substituer à z & u des nombres quelconques, & déterminer par-là p & q , & par conséquent aussi la valeur de $x=\frac{pp-11}{2}$.

Soit, par exemple, $z=2$ & $u=1$, on aura $p=\frac{21}{5}$ & $q=\frac{23}{5}$; donc $pp-qq=\frac{403}{25}$ & $x=\frac{204}{25}$.

221.

Mais afin de résoudre cette question d'une manière générale, soit $a=cc+dd$, &

l'inconnue $=z$; c'est-à-dire que ce soient les formules $a+z$ & $a-z$ qui doivent devenir des carrés.

Faisons. $a+z=xx$ & $a-z=yy$, nous aurons d'abord $2a=2(cc+dd)=xx+yy$, ensuite $2z=xx-yy$. Donc il faut que les carrés xx & yy soient tels que $xx+yy=2(cc+dd)$, où en effet $2(cc+dd)$ est la somme de deux carrés, savoir $=(c+d)^2+(c-d)^2$. Supposons, pour abréger, $c+d=f$, & $c-d=g$, il faudra que $xx+yy=ff+gg$, & cela arrivera, d'après ce qui a été dit ci-dessus, quand $x=\frac{2ff+g(pp-qq)}{pp+qq}$ & $y=\frac{2ff-g(pp-qq)}{pp+qq}$. On obtient par-là une solution très-facile, en faisant $p=1$ & $q=1$; car on trouve $x=\frac{2f}{2}=g=c-d$, & $y=f=c+d$; par conséquent $z=cd$; & il est clair que $a+z=cc+dd+2cd=(c+d)^2$, & $a-z=cc+dd-2cd=(c-d)^2$.

Cherchons une autre solution, en faisant $p=2$ & $q=1$; nous aurons $x=\frac{c-2d}{5}$ & $y=\frac{7c+d}{5}$, où tant c & d que x & y peuvent se prendre en moins, parce qu'il n'est

question que de leurs quarrés. Or puisque x doit être plus grand que y , qu'on fasse d négatif, on aura $x = \frac{c+7d}{5}$ & $y = \frac{7c-d}{5}$. De là résulte $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, & cette valeur étant ajoutée à $a = cc + dd$, donne $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, dont la racine quarrée est $\frac{c+7d}{5}$; si l'on soustrait ensuite z de a , il reste $\frac{49cc - 14cd + dd}{25}$, le quarré de $\frac{7c-d}{5}$; & on voit qu'en effet de ces deux racines quarrées la premiere est $= x$ & la seconde $= y$.

222.

Septieme-question. On cherche un nombre x tel que; soit qu'on ajoute 1 à ce nombre même, soit qu'on ajoute 1 à son quarré xx , on obtienne un quarré.

Il s'agit de transformer en quarrés les deux formules $x+1$ & $xx+1$. Qu'on suppose donc la premiere $x+1=pp$, & à cause de $x=pp-1$, la seconde $xx+1=p^4-2pp+2$, devra être un quarré. Cette dernière formule est de nature à ne point admettre de solution, à moins qu'on ne

connoisse d'avance un cas satisfaisant; mais un tel cas se présente aussi-tôt, c'est celui de $p=1$. Soit donc $p=1+q$, on aura $xx+1=1+4qq+4q^2+q^4$, ce qui peut devenir un quarré en bien des manieres.

I.) Qu'on en suppose d'abord la racine $= 1+qq$, on aura $1+4qq+4q^2+q^4=1+2qq+q^4$; ainsi $4q+4qq=2q$, ou $4+4q=2$ & $q=-\frac{1}{2}$; donc $p=\frac{1}{2}$ & $x=-\frac{3}{4}$.

II.) Soit la racine $= 1-qq$, on trouvera $1+4qq+4q^2+q^4=1-2qq+q^4$; par conséquent $q=-\frac{3}{2}$ & $p=-\frac{1}{2}$, ce qui donne $x=-\frac{3}{4}$, comme auparavant.

III.) Si l'on fait la racine $= 1+2q+qq$, afin de retrancher le premier & les deux derniers termes, on a $1+4qq+4q^2+q^4=1+4q+6qq+4q^2+q^4$, d'où l'on tire $q=-2$ & $p=-1$; donc $x=0$.

IV.) On peut adopter aussi $1-2q-qq$ pour la racine, & on a dans ce cas $1+4qq+4q^2+q^4=1-4q-2qq+4q^2+q^4$; mais on trouve comme auparavant $q=-2$.

V.) On peut, si l'on veut, retrancher les

deux premiers termes, en faisant la racine $\equiv 1 + 2q$; car on aura $1 + 4q + 4q^2 + q^4 \equiv 1 + 4q + 4q^2$; alors $q = \frac{4}{3}$ & $p = \frac{7}{3}$; par conséquent $x = \frac{40}{9}$; enfin $x + 1 = \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$, & $xx + 1 = \frac{1681}{81} = \left(\frac{41}{9}\right)^2$.

On trouvera un plus grand nombre de valeurs pour q , en faisant usage pour cela d'une de celles qu'on vient de déterminer, par exemple de celle-ci, $q = -\frac{1}{2}$; car soit à présent $q = -\frac{1}{2} + r$, on a $p = \frac{1}{2} + r$; $pp = \frac{1}{4} + r + rr$, & $p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$; donc l'expression $\frac{21}{16} - \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4$, à laquelle notre formule se réduit, devra être un carré, & elle devra l'être aussi étant multipliée par 16, dans lequel cas on a $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4$. C'est pourquoi faisons à présent:

I.) La racine $\equiv 5 + fr + 4rr$; en sorte que $25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 \equiv 25 + 10fr + 40rr + ffr + 8fr^3 + 16r^4$. Les premiers & les derniers termes se détruisent, & nous ôterons aussi les seconds, en faisant $-24 \equiv 10f$, & par conséquent

$f = -\frac{12}{5}$; divisant ensuite les termes restans par rr , nous avons $-8 + 32r \equiv 40 + ffr + 8fr$; & en admettant le signe supérieur, nous trouvons $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$. Or, à cause de $f = -\frac{12}{5}$, nous avons $r = \frac{21}{20}$; donc $p = \frac{31}{20}$, & $x = \frac{161}{400}$; ainsi $x + 1 = \left(\frac{31}{20}\right)^2$, & $xx + 1 = \left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II.) Que si nous adoptons le signe inférieur, nous avons $-8 + 32r \equiv 40 + ffr - 8fr$, d'où se conclut $r = \frac{ff - 12}{32 - 8f}$; & puis-que $f = -\frac{12}{5}$, on a $r = -\frac{41}{20}$; donc $p = \frac{31}{20}$, ce qui conduit à l'équation précédente.

III.) Soit $4rr + 4r \pm 5$ la racine de la formule; de sorte que $16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 \equiv 16r^4 + 32r^3 + 40rr + 40r + 25$. Comme

de part & d'autre les deux premiers termes & le dernier se détruisent, nous aurons $-8r - 24 \equiv 40r + 16r + 40$, ou $-24r - 24 \equiv 40r + 40$. Si nous admettons le signe supérieur, nous avons par conséquent $-24r - 24 \equiv 40r + 40$, ou $0 \equiv 64r + 64$, ou $0 \equiv r + 1$, c'est-à-dire $r \equiv -1$ & $p \equiv -\frac{1}{2}$;

mais c'est un cas qui nous est déjà connu ; & on n'en auroit pas trouvé un différent en faisant usage de l'autre signe.

IV.) Que la racine soit $\sqrt{f+fr+grr}$, & qu'on détermine f & g , de façon à faire évanouir les trois premiers termes. Puisque actuellement $25-24r-8rr+32r^2+16r^4$
 $= 25+10fr+10grr+2fg^2+ggr^4$, on
 $+ffrr$

aura d'abord $-24=10f$, ainsi $f=-\frac{12}{5}$;
 ensuite $-8=10g+ff$, ou $g=-\frac{8-ff}{10}$
 $=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$. Quand on aura donc substitué & divisé les termes restans par r^3 , on aura $32+16r=2fg+ggr$, & $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$.
 Or le numérateur $2fg-32$ devient ici
 $=\frac{-24 \cdot 172 - 32 \cdot 625}{5 \cdot 125} = \frac{-32 \cdot 696}{625} = \frac{-16 \cdot 32 \cdot 31}{625}$, & le dénominateur $16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{128}{125}$
 $\cdot \frac{672}{125} = \frac{8 \cdot 32 \cdot 41 \cdot 21}{25 \cdot 625}$; ainsi $r=-\frac{1550}{861}$; & on en conclut $p=-\frac{2239}{1752}$, moyennant quoi on obtient une nouvelle valeur de x à cause de $x=pp-1$.

223.

Huitième question. Trouver un nombre x qui, ajouté à chacun des nombres donnés a , b & c , produise un carré.

Puisqu'il faut que les trois formules $x+a$, $x+b$ & $x+c$ soient des carrés, qu'on fasse la première $x+a=zz$, on aura $x=zz-a$, & les deux autres formules se changeront en $zz+b-a$, & $zz+c-a$. Il faudroit présentement que chacune de celles-ci fût un carré ; mais c'est ce qui n'admet point de solution générale ; souvent la chose est impossible, & la possibilité dépend uniquement de la nature des nombres $b-a$ & $c-a$. Car si, par exemple, $b-a=1$ & $c-a=-1$, c'est-à-dire $b=a+1$ & $c=a-1$, il faudroit que $zz+1$ & $zz-1$ fussent des carrés, & que z par conséquent fût une fraction ; ainsi on feroit $z=\frac{p}{q}$, & il faudroit que les deux formules $pp+qq$ & $pp-qq$ fussent des carrés, & que par conséquent aussi leur produit p^4-q^4 fût un carré ; or nous avons fait voir plus haut que cela est impossible.

Voulût-on faire $b-a=2$, & $c-a=-2$, c'est-à-dire $b=a+2$ & $c=a-2$, on auroit, en faisant encore $z=\frac{p}{q}$, les deux formules $pp+2qq$ & $pp-2qq$ à transformer en quarrés; par conséquent il faudroit aussi, que leur produit p^4-4q^4 devint un quarré; or c'est ce que nous avons de même fait voir être impossible.

Soit en général $b-a=m$ & $c-a=n$; de plus $z=\frac{p}{q}$, il faudra que les formules $pp+mq$ & $pp+nq$ deviennent des quarrés; & nous venons de voir que cela est impossible, tant lorsque $m=+1$ & $n=-1$, que lorsque $m=+2$ & $n=-2$.

Cela est impossible aussi, lorsque $m=ff$ & $n=-ff$; car on auroit dans ce cas deux formules, dont le produit seroit $=p^4-f^4q^4$, c'est-à-dire la différence de deux bi-quarrés, & nous savons qu'une telle différence ne peut jamais devenir un quarré.

De même, quand $m=2ff$ & $n=-2ff$, on a les deux formules $pp+2ffq$ & $pp-2ffq$ qui ne peuvent devenir toutes les deux des quarrés, parce qu'il faudroit que

leur produit $p^4-4f^4q^4$ pût devenir un quarré; or si l'on fait $fg=r$, ce produit se change en p^4-4r^4 , qui est une formule dont l'impossibilité a été démontrée plus haut.

Que si l'on suppose $m=1$ & $n=2$; en sorte qu'il s'agisse de réduire en quarrés les formules $pp+qq$ & $pp+2qq$, on fera $pp+qq=rr$ & $pp+2qq=ff$; la première équation donnera $pp=rr-qq$, & la seconde donnera $rr+qq=ff$; donc il faudroit que tant $rr-qq$ que $rr+qq$ pût être un quarré; or l'impossibilité en est prouvée, puisque le produit de ces formules, ou r^4-q^4 , ne peut devenir un quarré.

Les exemples que nous venons de donner suffisent pour faire voir qu'il n'est pas facile de choisir pour m & n les nombres qui rendent la solution possible. L'unique moyen de trouver de telles valeurs de m & de n , c'est de les imaginer, ou bien de les déterminer par la méthode qui suit.

On fait $ff+mqq=hh$ & $ff+nqq=kk$; on a par la première équation $m=\frac{hh-ff}{qq}$,

& par la seconde $n = \frac{hk-f}{ss}$; cela posé, on n'a qu'à prendre pour f, g, h & k des nombres quelconques à volonté, & on aura des valeurs de m & de n qui rendront la solution possible.

Soit, par exemp. $h=3, k=5, f=1$ & $g=2$, on aura $m=2$ & $n=6$; & on peut être certain maintenant qu'il est possible de réduire en carrés les formules $pp+2qq$ & $pp+6qq$, puisqu'on cela arrive quand $p=1$ & $q=2$. Mais la première formule devient en général un carré, si $p=rr-2ff$ & $q=2rf$; car il en résulte $pp+2qq=(rr+2ff)^2$. La seconde formule devient alors $pp+6qq=r^4+20rff+4f^4$, & nous connaissons un cas où elle devient un carré, savoir le cas de $p=1$ & $q=2$, qui donne $r=1$ & $f=1$, ou en général $r=f$; de sorte que la formule est $=25f^4$. Connoissant donc ce cas, nous ferons $r=f+2$; nous aurons $rr=ff+2f+2$, & $r^4=f^4+4f^3+6ff+4f^2+2$, notre formule deviendra $25f^4+44f^3+26ff+4f^2+2$; & supposant que la racine soit $5ff$

$$+ff+2, \text{ nous l'égalons au carré } 25f^4 \\ +10ff+10ff+2ff+2, \text{ au moyen} \\ +ffff$$

de quoi les premiers & les derniers termes se détruiront. Faisons de plus $4=2f$, ou $f=2$, afin de chasser les termes pénultièmes, & nous parviendrons à l'équation $44f+26=10ff+10f+ff=20f+14$, ou $2f=-2$, & $f=-1$; donc $f=-1$ & $t=2$, ou $t=-2f$, & par conséquent $r=-f$ & $r=ff$, ce qui n'est autre chose que le cas déjà connu.

Mais déterminons donc plutôt f , de façon que les seconds termes s'évanouissent: il faudra faire $44=10f$, ou $f=\frac{22}{5}$; & en divisant ensuite les autres termes par ff , nous aurons $26f+4t=10f+ff+2ft$, c'est-à-dire $\frac{84}{25}f=\frac{24}{5}t$; ce qui donne $t=-\frac{7}{10}f$ & $r=f+t=\frac{3}{10}f$; ou $f=\frac{3}{10}$; ainsi $f=3$ & $f=10$; moyennant cela nous trouvons $p=2ff-rf=19$ & $q=2rf=60$, & nos formules seront $pp+2qq=43681=(209)^2$ & $pp+6qq=58081=241^2$.

224.

Remarque. On peut trouver de la même manière encore d'autres nombres pour m & n , qui fassent que nos formules deviennent des carrés; & il est bon de remarquer que le rapport de m à n est arbitraire.

Soit ce rapport, comme a à b , & qu'on ait $m = a\gamma$ & $n = b\gamma$, il sera question de savoir comment on doit déterminer γ , afin que les deux formules $pp + a\gamma\gamma\gamma$ & $pp + b\gamma\gamma\gamma$ puissent être transformées en carrés. Nous en indiquerons les moyens dans la solution du problème suivant.

225.

Neuvième question. Si a & b sont des nombres donnés, trouver le nombre γ , tel que les deux formules $pp + a\gamma\gamma\gamma$ & $pp + b\gamma\gamma\gamma$ deviennent des carrés, & déterminer en même temps les plus petites valeurs possibles de p & de q .

Qu'on fasse $pp + a\gamma\gamma\gamma = rr$ & $pp + b\gamma\gamma\gamma = ff$, & qu'on multiplie la première équation par b & la seconde par a , la différence

des deux produits fournira l'équation $(b-a)$

$$\begin{aligned} pp &= brr - aff, \text{ \& par conséquent } pp = \frac{brr - aff}{b-a}, \\ \text{\& il faudra que cette formule soit un carré,} \\ \text{or c'est ce qui arrive, quand } r &= f. \text{ Qu'on} \\ \text{suppose donc, afin de faire sortir les frac-} \\ \text{tions, } r &= f + (b-a)t, \text{ on aura } pp = \frac{brr - aff}{b-a} \\ &= \frac{bff + 2b(b-a)ft + b(b-a)^2tt - aff}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)ff + 2b(b-a)ft + b(b-a)^2tt}{b-a} \\ &= ff + 2bft + b(b-a)tt. \end{aligned}$$

Qu'on fasse maintenant $p = f + \frac{x}{\gamma}t$, on aura $pp = ff + \frac{2x}{\gamma}ft + \frac{x^2}{\gamma^2}tt = ff + 2bft + b(b-a)tt$, où les ff se détruisent; de sorte que les autres termes étant divisés par t , & multipliés par $\gamma\gamma$, donnent $2b\gamma\gamma + b(b-a)\gamma\gamma\gamma = 2fxy + txx$, d'où résulte $t = \frac{2fxy - 2b\gamma\gamma}{b(b-a)\gamma\gamma - ax}$ & $f = \frac{2xy - b\gamma\gamma}{b(b-a)\gamma\gamma - ax}$. Ainsi $t = 2xy - 2b\gamma\gamma$, & $f = b(b-a)\gamma\gamma - ax$; de plus $x = 2(b-a)xy - b(b-a)\gamma\gamma - xxx$, & par conséquent $p = f + \frac{x}{\gamma}t = b(b-a)\gamma\gamma + xx - 2bxy = (x - b\gamma)^2 - ab\gamma\gamma$.

Ayant donc trouvé p , r & f , il nous

reste à déterminer z . Soustrayons pour cet effet la première équation $pp + azqg = rr$ de la seconde $pp + bzqg = ff$, le reste fera $zqg(b-a) = ff - rr = (f+r)(f-r)$. Or $f+r = 2(b-a)xy - 2ax$, & $f-r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, ou $f+r = 2x((b-a)y-x)$, & $f-r = 2(b-a)y(by-x)$; ainsi $(b-a)zqg = 2x((b-a)y-x) \cdot 2(b-a)y(by-x)$, ou $zqg = 2x((b-a)y-x)xy(by-x)$, ou $zqg = 4xy((b-a)y-x)(by-x)$; par conséquent $z = \frac{4xy((b-a)y-x)(by-x)}{qg}$.

Il s'agit donc de prendre pour qg le plus grand carré, par lequel le numérateur soit divisible; mais remarquons premièrement que nous avons déjà trouvé $p = b(b-a)xy + xx - 2bxy = (x-by)^2 - aby$, & qu'ainsi on peut simplifier en faisant $x = v + by$, ou $x - by = v$, vu qu'alors $p = vv - aby$, & $z = \frac{4(v+by) \cdot v \cdot v(v+by)}{qg}$, ou $z = \frac{4v^2(v+by)^2}{qg}$. Moyennant cela on pourra prendre pour v & y des nombres quelconques, & adoptant pour qg le plus grand carré contenu dans le numérateur, on déterminera facilement

lement la valeur de z ; après quoi on reviendra aux équations $m = az$, $n = bz$, & $p = vv - aby$, & on obtiendra les formules qu'on cherchoit.

I.) $pp + azqg = (vv - aby)^2 + 4avy(v+by)$, qui est un carré dont la racine est $r = vv - 2avy - aby$.

II.) La seconde formule devient $pp + bzqg = (vv - aby)^2 + 4bv(v+by)(v+by)$, ce qui est aussi un carré dont la racine $f = vv - 2bv - aby$; & on peut prendre les valeurs tant de r que de f positives. Développons ces résultats dans quelques exemples.

226.

Exemple premier. Soit $a = -1$ & $b = +1$; & qu'on cherche des nombres z , tels que les deux formules $pp - zqg$ & $pp + zqg$ deviennent des carrés; savoir la première $= rr$, & la seconde $= ff$.

Nous avons donc $p = vv + yy$, & nous n'aurons, afin de trouver z , qu'à considérer la formule $z = \frac{4v(v+y)(v+y)}{qg}$; nous donnerons

à v & à y différentes valeurs ; & nous verrons celles qui en résultent pour z .

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	1	1	4	9	1
$v-y$	1	1	3	1	7	7
$v+y$	3	5	5	9	25	9
z	4	6	10	16	36	16
z	4	6	10	16	36	16
z	4	6	10	16	36	16
p	5	13	17	41	337	65

Nous sommes en état, moyennant ces valeurs, de résoudre les formules suivantes, & d'en faire des carrés.

I.) On peut transformer en carrés les formules $pp-6qq$ & $pp+6qq$: cela se fait en supposant $p=5$ & $q=2$; car la première devient $=25-24=1$, & la seconde $=25+24=49$.

II.) Aussi les deux formules $pp-30qq$ & $pp+30qq$: savoir en faisant $p=13$ & $q=2$; car la première devient $=169-120=49$, & la seconde $=169+120=289$.

III.) De même les deux formules $pp-15qq$ & $pp+15qq$: car si l'on fait $p=17$ &

$q=4$, on a la première $=289-240=49$, & la seconde $=289+240=529$.

IV.) Les deux formules $pp-5qq$ & $pp+5qq$ deviennent pareillement des carrés : savoir quand $p=41$ & $q=12$; car alors $pp-5qq=1681-720=961=31^2$, & $pp+5qq=1681+720=2401=49^2$.

V.) Les deux formules $pp-7qq$ & $pp+7qq$ sont des carrés, si $p=337$ & $q=120$; car la première alors est $=113569-100800=12769=113^2$, & la seconde est $=113569+100800=214369=463^2$.

VI.) Les formules $pp-14qq$ & $pp+14qq$ deviennent des carrés dans le cas de $p=65$ & de $q=12$; car alors $pp-14qq=4225-2016=2209=47^2$, & $pp+14qq=4225+2016=6241=79^2$.

227.

Exemple second. Lorsque les deux nombres m & n sont dans le rapport de 1:2, c'est-à-dire que $a=1$ & $b=2$, & qu'ainsi $m=7$ & $n=27$, trouver pour z des valeurs

T ij

telles, que les formules $pp+zzq$ & $pp+zzq$ puissent être transformées en carrés.

Il seroit superflu ici de faire usage des formules générales que nous avons données plus haut, cet exemple pouvant se réduire immédiatement au précédent. En effet, si $pp+zzq=rr$ & $pp+zzq=ss$, on a par la première équation $pp=rr-zzq$, ce qui étant substitué dans la seconde, donne $rr+zzq=ss$; ainsi la question est uniquement que les deux formules $rr-zzq$ & $rr+zzq$ puissent devenir des carrés, & c'est, comme on voit, le cas de l'exemple précédent. On aura par conséquent pour z les valeurs suivantes, 6, 30, 15, 5, 7, 14, &c.

On peut faire aussi en général une transformation semblable. Car supposons que les deux formules $pp+mq$ & $pp+nq$ puissent devenir des carrés, & faisons $pp+mq=rr$ & $pp+nq=ss$; la première équation donnant $pp=rr-mq$, la seconde deviendra $ss=rr-mq+nq$, ou $rr+(n-m)q=ss$; si donc les premiers

formules sont possibles, ces dernières $rr-mq$ & $rr+(n-m)q$ le seront de même, & comme m & n peuvent être mis l'un à la place de l'autre, les formules $rr-nq$ & $rr+(m-n)q$ seront possibles pareillement; & au contraire, si les premières sont impossibles, les autres ne le seront pas moins.

228.

Exemple troisième. Que m soit à n comme 1:3, ou bien que $a=1$ & $b=3$, de sorte que $m=z$ & $n=3z$, & qu'il s'agisse de transformer en carrés les formules $pp+zzq$ & $pp+3zzq$.

Puisque $a=1$ & $b=3$, la question sera possible dans tous les cas où $zzq=4xy$ ($v+y$)($v+3y$), & $p=vv-3xy$. Ainsi adoptons pour v & y les valeurs suivantes :

	I.	II.	III.	IV.	V.
p	1	3	4	1	16
q	1	2	1	8	9
$p+q$	2	5	5	9	25
$p+3q$	4	9	7	25	49
$3q^2$	16	36	36	144	144
qq	16	49	44	449	1625
q	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Or nous avons ici deux cas pour $q=2$, ce qui fait que nous pouvons transformer de deux manieres les formules $pp+2qq$ & $pp+6qq$.

La premiere est de faire $p=2$ & $q=4$, & par conséquent aussi $p=1$ & $q=2$; car nous avons alors $pp+2qq=9$ & $pp+6qq=25$.

La seconde maniere est de supposer $p=191$ & $q=60$, moyennant quoi nous aurons $pp+2qq=(209)^2$ & $pp+6qq=241^2$. Il est difficile de décider si on ne pourroit pas faire aussi $q=1$; ce qui auroit lieu, quand qq seroit un carré. Mais quant à la question, si les deux formules $pp+qq$ & $pp+3qq$ peuvent devenir des carrés, voici le procédé qu'elle exige.

229.

Il s'agit de rechercher si on peut transformer en carrés, ou non, les formules $pp+qq$ & $pp+3qq$: qu'on suppose $pp+qq=rr$ & $pp+3qq=ss$, & qu'on considere les points suivans:

I.) Les nombres p & q peuvent être regardés comme premiers entr'eux; car s'ils avoient un commun diviseur, les deux formules ne laisseroient pas de rester des carrés, après qu'on auroit divisé p & q par ce diviseur.

II.) p ne peut être un nombre pair; car en ce cas q seroit impair, & par conséquent la seconde formule seroit un nombre de l'espece $4n+3$, qui ne peut devenir un carré; donc p est nécessairement impair, & pp est un nombre de l'espece $8n+1$.

III.) Puis donc que p est impair, il faut que, dans la premiere formule, q soit non-seulement pair, mais qu'il soit même divisible par 4, afin que qq devienne un nombre de l'espece $16n$, & que $pp+qq$ soit de l'espece $8n+1$.

T iv

IV.) De plus p ne peut être divisible par 3 ; car si cela étoit, pp seroit divisible par 9, & qq ne le seroit pas ; ainsi $3qq$ ne seroit divisible que par 3 & non par 9 ; par conséquent aussi $pp+3qq$ ne pourroit être divisé que par 3 & non par 9, & ne pourroit donc être un carré ; ainsi p ne peut être divisé par 3, & pp sera un nombre de l'espèce $3n+1$.

V.) Puisque p n'est pas divisible par 3, il faut que q le soit ; car autrement qq seroit un nombre de l'espèce $3n+1$, & par conséquent $pp+qq$ un nombre de l'espèce $3n+2$, qui ne peut être un carré ; donc q doit pouvoir se diviser par 3.

VI.) p n'est pas divisible non plus par 5 ; car si cela étoit, q ne le seroit pas, & qq seroit un nombre de l'espèce $5n+1$ ou $5n+4$; par conséquent $3qq$ seroit de l'espèce $5n+3$ ou $5n+2$, & comme $pp+3qq$ appartiendroit aux mêmes espèces, cette formule ne pourroit devenir un carré ; donc il faut nécessairement que p ne soit pas divisible par 5, & que pp soit un

nombre de l'espèce $5n+1$, ou de l'espèce $5n+4$.

VII.) Mais puisque p n'est pas divisible par 5, voyons si q est divisible par 5 ou non ; que si q n'étoit pas divisible par 5, qq seroit de l'espèce $5n+2$ ou $5n+3$, comme nous avons vu ; & puisque pp est $5n+1$ ou $5n+4$, il faudroit que $pp+3qq$ fût de même, ou $5n+1$ ou $5n+4$.

Qu'on s'imagine $pp=5n+1$, on aura $qq=5n+4$, parce qu'autrement $pp+qq$ ne pourroit être un carré ; mais on auroit alors $3qq=5n+2$ & $pp+3qq=5n+3$, ce qui ne peut être un carré.

Soit en second lieu $pp=5n+4$, on a dans ce cas $qq=5n+1$ & $3qq=5n+3$; donc $pp+3qq=5n+2$, ce qui ne peut être non plus un carré. Il s'ensuit de-là que qq doit être divisible par 5.

VIII.) Or q étant divisible d'abord par 4, ensuite par 3 & en troisième lieu aussi par 5, il faut que ce soit un nombre tel que $4.3.5m$, ou que $q=60m$; ainsi nos formules deviendroient $pp+3600mm=rr$,

& $pp + 1080mm = ff$; cela posé, la première, étant soustraite de la seconde, donnera $7200mm = ff - rr = (f+r)(f-r)$; de sorte qu'il faudra que $f+r$ & $f-r$ soient des facteurs de $7200mm$; & on doit faire attention en même temps qu'il faut que f & r soient des nombres impairs, & de plus premiers entr'eux.

IX.) Soit de plus $7200mm = 4fg$; ou que les facteurs en soient $2f$ & $2g$, & qu'on suppose $f+r = 2f$ & $f-r = 2g$, on aura $f = f+g$ & $r = f-g$; & il faudra que f & g soient premiers entr'eux, & que l'un soit pair & l'autre impair. Or comme $fg = 1800mm$, il faudra donc décomposer $1800mm$ en deux facteurs, dont l'un soit pair & l'autre impair, & qui n'aient aucun commun diviseur.

X.) Il est à remarquer en outre, que puisque $rr = pp + qq$, & qu'ainsi r est un diviseur de $pp + qq$; il faut que $r = f-g$ soit pareillement la somme de deux carrés, & comme ce nombre est impair, il faut qu'il soit contenu dans la formule $4n+1$.

XI.) Si nous commençons maintenant par supposer $m=1$, nous aurons $fg=1800=8.9.25$, & de-là résulteront les décompositions suivantes: $f=1800$ & $g=1$, ou $f=200$ & $g=9$, ou $f=72$ & $g=25$, ou $f=225$ & $g=8$. La première donne $r=f-g=1799=4n+3$; la seconde donne $r=f-g=191=4n+3$; la troisième donne $r=f-g=47=4n+3$; mais la quatrième donne $r=f-g=217=4n+1$. Ainsi les trois premières décompositions devront être exclues, & il ne nous restera que la quatrième; nous pouvons en conclure en général, que le plus grand facteur doit être impair, & que le plus petit doit être pair; mais au reste la valeur $r=217$ ne peut même avoir lieu ici, parce que ce nombre est divisible par 7, ce qui n'est pas la somme de deux carrés.

XII.) Soit $m=2$, on aura $fg=7200=2.2.2.2.2.2.5$; c'est pourquoi l'on fera $f=225$ & $g=32$, en sorte que $r=f-g=193$; & ce nombre étant la somme de deux carrés, il vaudra la peine de l'essayer.

Or comme $q=120$ & $r=193$, & que $pp=rr-qq=(r+q)(r-q)$, on aura $r+q=313$, & $r-q=73$; mais puisque ces facteurs ne sont pas des quarrés, on voit bien que pp ne devient pas un quarré. On perdrait de même sa peine à substituer au lieu de m d'autres nombres, c'est ce que nous allons encore faire voir.

230.

Théoreme. Il est impossible que les deux formules $pp+qq$ & $pp+3qq$ soient l'une & l'autre un quarré en même temps; de sorte que dans les cas où l'une est un quarré, il est sûr que l'autre n'en est pas un.

Démonstration. Puisque p est impair & que q est pair, ainsi que nous l'avons vu, $pp+qq$ ne peut être un quarré que lorsque $q=2f$ & $p=rr-ff$; & $pp+3qq$ ne peut être $=\square$, que lorsque $q=2u$ & $p=u-u-3uu$, ou $p=3uu-u$. Or comme dans les deux cas q doit être un double produit, qu'on suppose pour l'un & l'autre $q=2abcd$, & qu'on fasse pour la première formule

$r=ab$ & $f=cd$, & pour la seconde $t=ac$ & $u=bd$, on aura pour celle-là $p=aabb-ccdd$, & pour celle-ci $p=aacc-3bbdd$, ou $p=3bbdd-aacc$, & ces deux valeurs doivent être égales; ainsi l'on a ou $aabb-ccdd=aacc-3bbdd$, ou bien $aabb-ccdd=3bbdd-aacc$, & on observera que les nombres a , b , c & d sont généralement plus petits que p & q . Il faudra maintenant considérer chaque cas séparément: le premier donne $aabb+3bbdd=ccdd+aacc$, ou $bb(aa+3dd)=cc(aa+dd)$, d'où résulte $\frac{bb}{cc}=\frac{aa+dd}{aa+3dd}$, fraction qui doit être un quarré. Or le numérateur & le dénominateur ne peuvent avoir ici d'autre commun diviseur que 2, parce qu'ils ont pour différence $2dd$. Si donc 2 étoit un commun diviseur, il faudroit que tant $\frac{aa+dd}{2}$ que $\frac{aa+3dd}{2}$ fût un quarré; mais les nombres a & d sont dans ce cas impairs l'un & l'autre, ainsi leurs quarrés font de la forme $8n+1$; & la formule $\frac{aa+3dd}{2}$ est comprise dans l'expression $4n+2$, & ne peut être un quarré; donc 2 ne peut être un diviseur commun;

le numérateur $aa + dd$ & le dénominateur $aa + 3dd$ sont premiers entr'eux, & il faut que chacun soit de soi-même un carré. Or ces formules sont semblables aux premières, & si celles-ci étoient des carrés, il faudroit que des formules semblables, mais composées des plus petits nombres, fussent aussi des carrés; ainsi on peut conclure réciproquement de ce qu'on n'a pas trouvé des carrés dans les petits nombres, qu'il n'y en a point dans les grands.

Cette conclusion cependant n'est admissible qu'autant que le second cas $aabb - ccdd = 3bdd - aacc$, nous en fournira une pareille. Or cette équation donne $aabb + aacc = 3bdd + ccdd$, ou $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, & par conséquent $\frac{aa}{dd} = \frac{3bb + cc}{bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, ainsi cette fraction devant être un carré, la conclusion précédente se trouve pleinement confirmée; car si dans de grands nombres il y avoit des cas où $pp + qq$ & $pp + 3qq$ fussent des carrés, il faudroit que de tels cas existassent aussi pour des nombres plus petits, & c'est ce qui n'a pas lieu.

231.

Deuxième question. Déterminer trois nombres, x, y & z , tels qu'en les multipliant ensemble deux à deux, & ajoutant 1 au produit, on obtienne chaque fois un carré; c'est-à-dire qu'il s'agit de transformer en carrés les trois formules suivantes:

$$\text{I. } xy + 1, \text{ II. } xz + 1, \text{ \& III. } yz + 1.$$

Qu'on suppose des deux dernières l'une $xz + 1 = pp$, & l'autre $yz + 1 = qq$, & on aura $x = \frac{p^2-1}{z}$ & $y = \frac{q^2-1}{z}$. La première formule se trouve transformée par-là en celle-ci, $\frac{(p^2-1)(q^2-1)}{z^2} + 1$, qui doit par conséquent être un carré, & qui ne le sera pas moins si on la multiplie par z^2 ; de sorte que la formule $(pp-1)(qq-1) + z^2$, doit être un carré, ce qu'il est facile d'obtenir. En effet, que la racine en soit $z + r$, on aura $(pp-1)(qq-1) = 2rz + rr$, & $z = \frac{(pp-1)(qq-1)-rr}{2r}$, où l'on peut substituer à p, q & r des nombres quelconques.

Soit, par exemple, $r = pq - 1$, on

$$\begin{aligned} \text{aura } rr &= ppq + 2pq + 1, \text{ \& } z = \frac{-2pq - pp - 1}{-2pq - 2} \\ &= \frac{pp + 2pq + 1}{2pq + 2}; \text{ donc } x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp+2pq+1} \\ &= \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2}, \text{ \& } y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}. \end{aligned}$$

Mais si l'on demande des nombres entiers, il faudra faire la premiere formule $xy + 1 = pp$, & supposer $z = x + y + q$; alors la seconde formule devient $xx + xy + xq + 1 = xx + qx + pp$, & la troisieme fera $xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp$, & elles deviennent évidemment des quarrés, si l'on fait $q = \pm 2p$, vu que dans ce cas la seconde est $= xx \pm 2px + pp$, dont la racine est $x \pm p$, & la troisieme est $= yy \pm 2py + pp$, dont la racine est $y \pm p$. Nous avons par conséquent cette solution très-élégante : $xy + 1 = pp$ ou $xy = pp - 1$, qui a lieu facilement pour une valeur quelconque de p ; & de plus le troisieme nombre se trouve moyennant cela de deux manieres, puisqu'on a ou $z = x + y + 2p$, ou $z = x + y - 2p$. Eclaircissons ces résultats par quelques exemples.

I.) Soit

I.) Soit $p = 3$; on aura $pp - 1 = 8$; & si l'on fait $x = 2$ & $y = 4$, on aura ou $z = 12$, ou $z = 0$; ainsi les trois nombres cherchés sont 2, 4 & 12.

II.) Soit $p = 4$, on a $pp - 1 = 15$; maintenant si $x = 5$ & $y = 3$, on trouve $z = 16$ ou $z = 0$; donc les trois nombres cherchés sont 3, 5 & 16.

III.) Soit $p = 5$, on aura $pp - 1 = 24$; & si de plus on fait $x = 3$ & $y = 8$, on trouve $z = 21$, ou bien aussi $= 1$; d'où résultent les nombres suivans : 1, 3 & 8, ou 3, 8 & 21.

232.

Treizieme question. On cherche trois nombres entiers, x , y , & z , tels que si on ajoute à chaque produit de ces nombres multipliés deux à deux, un nombre donné a , on obtienne chaque fois un quarré.

Puisque les trois formules suivantes doivent être des quarrés, I.) $xy + a$, II.) $xz + a$, III.) $yz + a$, qu'on suppose la premiere $xy + a = pp$, & qu'on fasse $z = x + y + q$,

Tome II.

V

on aura pour la seconde formule $xx+xy+xq+a=xx+xq+pp$, & pour la troisieme $xy+yy+yq+a=yy+yq+pp$, & elles deviennent toutes deux des carrés, si $a=+2p$; ainsi $z=x+y+2p$, c'est-à-dire qu'on peut trouver pour z deux valeurs différentes.

233.

Quatorzieme question. On demande quatre nombres entiers, x, y, z & v , tels que si on ajoute aux produits de ces nombres pris deux à deux, un nombre donné a , il en résulte des carrés.

Il faut donc que les six formules suivantes deviennent des carrés :

$$\text{I.) } xy+a, \text{ II.) } xz+a, \text{ III.) } yz+a,$$

$$\text{IV.) } xv+a, \text{ V.) } yv+a, \text{ VI.) } zv+a.$$

Qu'on commence par supposer la premiere $xy+a=pp$, & qu'on prenne $z=x+y+2p$, la seconde & la troisieme formule deviendront des carrés. Si de plus on suppose $v=x+y-2p$, la quatrieme & la cinquieme formules deviendront par

reillement des carrés; il ne reste donc que la fixieme formule qui sera $xx+2xy+yy-4pp+a$, & qui devra de même devenir un carré. Or comme $pp=xy+a$, cette derniere formule devient $xx-2xy+yy-3a$, & par conséquent il s'agit de transformer en carrés les deux formules suivantes :

$$\text{I.) } xy+a=pp, \text{ \& II.) } (x-y)^2-3a.$$

Que la racine de la dernière soit $(x-y)-q$, on aura $(x-y)^2-3a=(x-y)^2-2q(x-y)+qq$; ainsi $-3a=-2q(x-y)+qq$, & $x-y=\frac{qq+3a}{2q}$, ou $x=y+\frac{qq+3a}{2q}$; par conséquent $pp=yy+\frac{qq+3a}{2q}y+a$.

Soit à présent $p=y+r$, il en résultera $2ry+rr=\frac{qq+3a}{2q}y+a$, ou $4qry+2qrr=(qq+3a)y+2aq$, ou $2qrr-2aq=(qq+3a)y-4qcy$, & $y=\frac{2qrr-2aq}{qq+3a-4qr}$, où q & r sont arbitraires, pourvu que x & y deviennent des nombres entiers; car puisque $p=y+r$, les nombres z & v seront entiers pareillement. Le tout dépend principalement de la nature du nombre a , & il est vrai que

la condition par laquelle on exige des nombres entiers, pourroit causer quelques difficultés; mais il faut remarquer que la solution est déjà fort restreinte d'un autre côté, parce qu'on a donné aux lettres x & y les valeurs $x = y \pm 2p$, tandis qu'elles pourroient en avoir évidemment un grand nombre d'autres. Voici donc quelques considérations sur cette question, qui peuvent avoir leur utilité aussi dans d'autres cas.

I.) Lorsque $xy + a$ doit être un carré, ou $xy = pp - a$, il faut toujours que les nombres x & y aient la forme $rr - aff$; si donc nous supposons $x = bb - acc$ & $y = dd - aee$, nous trouvons $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$.

Soit maintenant $be - cd = \pm 1$, nous aurons $xy = (bd - ace)^2 - a$, & par conséquent $xy + a = (bd - ace)^2$.

II.) Si de plus nous supposons $z = ff - agg$, & que nous donnions à f & à g des valeurs telles que $hg - cf = \pm 1$, & que aussi $dg - ef = \pm 1$, les formules $xz + a$ & $yz + a$ deviendront pareillement des carrés. Ainsi tout se réduit à donner tant à b ,

c , d & e qu'à f & à g , des valeurs telles que la propriété que nous avons supposée ait lieu.

III.) Représentons ces trois couples de lettres par les fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ & $\frac{f}{g}$; elles devront être telles que chaque différence de deux d'entr'elles soit exprimée par une fraction, dont le numérateur $= 1$. Car puisque $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - de}{ce}$, il faut, ainsi que nous l'avons vu, que ce numérateur soit $= \pm 1$. Une de ces fractions au reste est arbitraire, & il est facile d'en trouver une autre, de façon que la condition prescrite ait lieu. Soit, par exemple, la première $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, il faudra que la seconde $\frac{d}{e}$ lui soit à peu près égale; qu'on fasse donc $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, on aura la différence $z = \frac{1}{6}$. On peut aussi déterminer cette seconde fraction par le moyen de la première, d'une manière générale; car puisque $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, il faut que $3e - 2d = 1$, & par conséquent $2d = 3e - 1$, & $d = e + \frac{e-1}{2}$. Ainsi faisant $\frac{e-1}{2} = m$, ou $e = 2m + 1$, nous aurons $d = 3m + 1$, & notre seconde fraction sera

$\frac{d}{c} = \frac{3m+1}{2m+1}$. C'est de la même manière qu'on pourra déterminer la seconde fraction pour telle première que l'on voudra, comme on le voit par les exemples suivans :

$\frac{b}{c}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{15}{8}$
$\frac{d}{c}$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+1}{3m+1}$	$\frac{7m+1}{4m+1}$	$\frac{9m+1}{5m+1}$	$\frac{11m+1}{6m+1}$	$\frac{13m+1}{7m+1}$	$\frac{15m+1}{8m+1}$

IV.) Quand on a déterminé de la façon requise les deux fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{c}$, il est facile d'en trouver aussi une troisième analogue à celles-là. On n'a qu'à supposer $f=b+d$ & $g=c+e$, de sorte que $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$; car les deux premières donnant $be=cd=\pm 1$, on a $\frac{f}{g} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$; & en soustrayant de même la seconde de la troisième, on aura $\frac{f}{g} - \frac{d}{c} = \frac{b-cd}{cc+ce} = \frac{\pm 1}{cc+ce}$.

V.) Après avoir déterminé de cette manière les trois fractions $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$ & $\frac{f}{g}$, il est facile de résoudre notre question pour trois nombres x , y & z , en faisant que les trois formules $xy+a$, $xz+a$ & $yz+a$, deviennent des quarrés: on n'a qu'à faire

$x=bb-acc$, $y=dd-aec$ & $z=ff-agg$. Qu'on prenne, par exemple, dans la table du n°. III, $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ & $\frac{d}{c} = \frac{4}{5}$, on aura $\frac{f}{g} = \frac{12}{7}$; d'où résulte $x=25-9a$, $y=49-16a$ & $z=144-49a$; & au moyen de quoi on a d'abord $xy+a=1225-840a+144a^2=(35-12a)^2$; ensuite $xz+a=3600-2520a+441a^2=(60-21a)^2$; enfin $yz+a=7056-4704a+784a^2=(64-28a)^2$.

234.

Qu'il s'agisse maintenant de déterminer, conformément à notre question, quatre lettres, x , y , z & v , il faudra joindre une quatrième fraction aux trois précédentes. Soient donc les trois premières $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, & qu'on suppose la quatrième fraction $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{c+g} = \frac{2d+b}{2c+e}$, de façon qu'elle ait avec la troisième & la seconde le rapport prescrit; si l'on fait après cela $x=bb-aacc$, $y=dd-aee$, $z=ff-agg$ & $v=hh-akk$, on aura rempli déjà les conditions suivantes: I.) $xy+a=\square$, II.) $xz+a=\square$, III.) yz
V iv

$+a = \square$, IV.) $yv + a = \square$, V.) $zv + a = \square$; & il ne reste donc qu'à faire en sorte qu'aussi $xv + a$ devienne un carré, ce qui ne résulte pas des suppositions précédentes, parce que la première fraction n'a pas avec la quatrième le rapport prescrit. Cela nous oblige à conserver dans les trois premières fractions le nombre indéterminé m ; c'est par ce moyen, & en déterminant m , que nous parviendrons à transformer aussi en carré la formule $xv + a$.

VI.) Qu'on tire donc de notre petite table le premier cas, & qu'on fasse $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ & $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m-1}$; on aura $\frac{f}{g} = \frac{3m+4}{2m+3}$ & $\frac{h}{k} = \frac{6m+5}{4m+4}$; d'où résulte $x = 9 - 4a$ & $v = (6m+5)^2 - a(4m+4)^2$; ainsi $xv + a = 9(6m+5)^2 - 4a(6m+5)^2 - 9a(4m+4)^2 + 4aa(4m+4)^2$, ou $xv + a = 9(6m+5)^2 - a(288m^2 + 538m + 243) + 4aa(4m+4)^2$, de quoi on peut facilement faire un carré, vu que mm se trouve multiplié par un carré; mais c'est à quoi nous ne nous arrêterons pas.

VII.) On peut aussi indiquer d'une manière plus générale les fractions dont nous

avons fait voir qu'on avoit besoin; car soit $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, $\frac{d}{e} = \frac{n-1}{n}$, on aura $\frac{f}{g} = \frac{n+1-1}{n-1}$, & $\frac{h}{k} = \frac{2n-1}{2n+1}$; qu'on suppose dans cette dernière fraction $2n+1 = m$, elle deviendra $\frac{m-2}{m}$; par conséquent la première donne $x = 11 - a$, & la dernière fournit $v = (1m-2)^2 - amn$. La question est donc seulement que $xv + a$ devienne un carré. Or à cause de $v = (11-a).mm - 41m + 4$, on a $xv + a = (11-a)^2 mm - 4(11-a)1m + 411 - 3a$; & puis donc que ceci doit être un carré, qu'on en suppose la racine $= (11-a)m - p$; le carré de cette quantité étant $(11-a)^2 mm - 2(11-a)mp + pp$, on aura $-4(11-a)1m + 411 - 3a = -2(11-a)mp + pp$; donc $m = \frac{pp - 411 + 3a}{(11-a)(2p-41)}$. Soit $p = 2l + q$, on trouvera $m = \frac{4l^2 + 9q + 3a}{2q(11-a)}$, où l'on peut adopter pour l & q tels nombres que l'on voudra.

Si, par exemple, $a = 1$, qu'on fasse $l = 2$, on aura $m = \frac{49 + 9q + 3}{6q}$; & en faisant $q = 1$, on trouvera $m = \frac{4}{3}$, de plus $m = 2n + 1$; mais ne nous arrêtons pas à cette question plus long-temps, & passons à une autre.

Quinzieme question. On cherche trois nombres x , y & z , tels que les sommes & les différences de ces nombres pris deux à deux, soient des quarrés.

La question exigeant qu'on transforme en quarrés les fix formules suivantes: I.) $x + y$, II.) $x + z$, III.) $y + z$, IV.) $x - y$, V.) $x - z$, VI.) $y - z$, on commencera par les trois dernieres, & on supposera $x - y = pp$, $x - z = qq$ & $y - z = rr$; les deux dernieres fourniront $x = qq + z$ & $y = rr + z$; de sorte qu'on aura $qq = pp + rr$, à cause de $x - y = qq - rr = pp$; ainsi $pp + rr$, ou la somme de deux quarrés, doit équivaloir à un quarré qq ; or c'est ce qui arrive, quand $p = 2ab$ & $r = aa - bb$, puisqu'alors $q = aa + bb$. Mais conservons encore les lettres p , q & r , & considérons aussi les trois premieres formules, nous aurons 1°. $x + y = qq + rr + 2z$; 2°. $x + z = qq + 2z$; 3°. $y + z = rr + 2z$. Soit la premiere $qq + rr + 2z = tt$, moyennant quoi $2z = tt - qq - rr$; il faudra encore que $tt - rr = \square$ & $tt - qq = \square$, c'est-à-dire $tt = (aa - bb)^2$

$= \square$ & $tt = (aa + bb)^2 = \square$; ou bien nous aurons à traiter les deux formules $tt - a^4 - b^4 + 2aabb$ & $tt - a^4 - b^4 - 2aabb$; or comme tant $cc + dd + 2cd$ que $cc + dd - 2cd$ sont des quarrés, il est aisé de voir que nous atteindrons notre but, en comparant $tt - a^4 - b^4$ avec $cc + dd$ & $2aabb$ avec $2cd$. Supposons dans ce dessein $cd = aabb = ffghhkk$, & prenons $c = ffgg$ & $d = hhhh$; $aa = ffhh$ & $bb = ggkk$, ou $a = fh$ & $b = gk$; la premiere équation $tt - a^4 - b^4 = cc + dd$, prendra la forme $tt - f^4h^4 - g^4k^4 = f^4g^4 + h^4k^4$; donc $tt = f^4g^4 + f^4h^4 + h^4k^4 + g^4k^4$, ou $tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$; il faudra par conséquent que ce produit soit un quarré; mais comme la résolution en seroit difficile, reprenons les choses d'une autre maniere.

Si nous déterminons par les trois premieres équations $x - y = pp$, $x - z = qq$, $y - z = rr$, les lettres y & z ; nous trouvons $y = x - pp$ & $z = x - qq$, d'où s'ensuit $qq = pp + rr$. Or nos premieres formules deviennent maintenant $x + y = 2x - pp$, $x + z = 2x - qq$, & $y + z = 2x - pp - qq$. Faisons

cette dernière $2x - pp - qq = tt$, de sorte que $2x = tt + pp + qq$, il ne nous restera à transformer en quarrés que les formules $tt + qq$ & $tt + pp$. Mais puisqu'il faut que $qq = pp + rr$, soit $q = aa + bb$, & $p = aa - bb$, nous aurons $r = 2ab$, & par conséquent nos formules feront :

$$I.) tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$$

$$II.) tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square.$$

Nous n'avons à présent, pour arriver à notre but, qu'à comparer de nouveau $tt + a^4 + b^4$ avec $cc + dd$ & $2aabb$ avec $2cd$. Soit donc, comme ci-dessus, $c = ffgg$, $d = hhkk$, & $a = fh$, $b = gk$, nous aurons $cd = aabb$, & il faudra encore que $tt + f^4 h^4 + g^4 k^4 = cc + dd = f^4 g^4 + h^4 k^4$, d'où résulte $tt = f^4 g^4 - f^4 h^4 + h^4 k^4 - g^4 k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4)$. Ainsi tout se réduit à trouver deux différences de deux bi-quarrés, savoir $f^4 - k^4$ & $g^4 - h^4$, qui, multipliées l'une par l'autre, produisent un quarré.

Considérons pour cet effet la formule $m^4 - n^4$, voyons quels nombres elle fournit, si l'on substitue à m & à n des nombres

donnés, & faisons attention aux quarrés qui se trouveront parmi ces nombres; la propriété de $m^4 - n^4 = (mm + nn)(mm - nn)$, nous servira à construire pour notre dessein la table qui suit :

TABLE des Nombres compris dans la Formule $m^4 - n^4$.

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	3.5
9	1	8	10	16.5
9	4	5	13	5.13
16	1	15	17	3.5.17
16	9	7	25	25.7
25	1	24	26	16.3.13
25	9	16	34	16.2.17
49	1	48	50	25.16.2.3
49	16	33	65	3.5.11.13
64	1	63	65	9.5.7.13
81	49	32	130	64.5.13
121	4	117	125	25.9.5.13
121	9	112	130	16.2.5.7.13
121	49	72	170	144.5.17
144	25	119	169	169.7.17
169	1	168	170	16.3.5.7.17
169	81	88	250	25.16.5.11
225	64	161	280	280.7.23

Nous pouvons déjà déduire de-là quelques solutions. En effet, soit $ff=9$ & $kk=4$, nous avons $f^2-k^2=13$; soit de plus $gg=81$ & $hh=49$, nous aurons $g^2-h^2=64$; donc alors $u=64.25.169$, & $t=520$. Or puisque $u=270400$, $f=3$, $g=9$, $k=2$, $h=7$, nous aurons $a=21$, $b=18$; ainsi $p=117$, $q=765$, & $r=756$; de tout cela résulte $2x=u+pp+qq=869314$, & par conséquent $x=434657$; ensuite $y=x-pp=420968$, & enfin $z=x-qq=150568$; & ce dernier nombre peut aussi se prendre positif; la différence alors devient la somme, & réciproquement la somme devient la différence. Puis donc que les trois nombres cherchés sont:

$$x=434657$$

$$y=420968$$

$$z=150568$$

nous avons $x+y=855625=(925)^2$

$$x+z=585225=(765)^2$$

$$y+z=571536=(756)^2$$

& de plus $x-y=13689=(117)^2$

$$x-z=284089=(533)^2$$

$$y-z=270400=(520)^2$$

La table que nous avons donnée, seroit trouver encore d'autres nombres, en supposant $ff=9$, $kk=4$, & $gg=121$, $hh=4$; car alors $u=13.5.5.13.9.25=9.25.25.169$, & $t=3.5.5.13=975$. Or comme $f=3$, $g=11$, $k=2$ & $h=2$, on a $a=fh=6$ & $b=gk=22$; par conséquent $p=aa-bb=448$, $q=aa+bb=520$, & $r=2ab=264$; de-là provient $2x=11+pp+qq=950625+200704+270400=1421729$, & $x=\frac{1421729}{2}$; donc $y=x-pp=\frac{1025121}{2}$, & $z=x-qq=\frac{880929}{2}$. Or il faut observer que si ces nombres ont la propriété qu'on exige, ils la conserveront par quelque carré qu'on les multiplie. Si donc on les prend quatre fois plus grands, il faut que les nombres suivans satisfassent également: $x=2843458$, $y=2040642$ & $z=1761858$; & comme ces nombres sont plus grands que les précédens, on peut regarder ceux-ci comme les plus petits que la question admette.

236.

Seizieme question. On demande trois quarrés, tels que la différence de chaque couple de ces quarrés soit un quarré.

La solution précédente peut servir à résoudre aussi cette nouvelle question. En effet, si x , y & z sont des nombres tels que les formules suivantes deviennent des quarrés: I.) $x+y$, II.) $x-y$, III.) $x+z$, IV.) $x-z$, V.) $y+z$, VI.) $y-z$; il est clair que pareillement le produit $xx-yy$ de la premiere & de la seconde, le produit $xx-zz$ de la troisieme & de la quatrieme, & le produit $yy-zz$ de la cinquieme & de la sixieme seront des quarrés, & par conséquent xx , yy & zz seront trois quarrés tels qu'on les demande. Mais ces nombres seroient fort grands, & il y en a sans doute de moindres qui satisfont, vu qu'il n'est pas nécessaire, pour que $xx-yy$ devienne un quarré, que $x+y$ & $x-y$ soient des quarrés; car, par exemple, $25-9$ est un quarré, quoique ni $5+3$ ni $5-3$ ne soient pas

pas des quarrés. Ainsi résolvons la question indépendamment de cette considération, & remarquons d'abord qu'on peut prendre 1 pour l'un des quarrés cherchés: la raison en est que si les formules $xx-yy$, $xx-zz$ & $yy-zz$ sont des quarrés, elles ne le seront pas moins, si on les divise par zz ; par conséquent on peut supposer qu'il s'agit de transformer $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz}$, $\frac{xx}{zz} - 1$, & $\frac{yy}{zz} - 1$, & la question ne roule à présent que sur les deux fractions $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$.

Or si nous supposons $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1}$ & $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, les deux dernieres conditions se trouveront remplies, puisque de cette façon $\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2}$ & $\frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}$. Par ce moyen-là il ne nous reste à traiter que la premiere formule $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right) \times \left(\frac{pp-1}{pp-1} - \frac{qq-1}{qq-1}\right)$; or le premier facteur est ici $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, le second est $= \frac{2(pp-qq)}{(pp-1)(qq-1)}$, & le produit

de ces deux facteurs est $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$.
 On voit que dans ce produit le dénominateur est déjà un carré, & que le numérateur renferme le carré 4, donc il ne s'agit que de transformer en carré la formule $(ppqq-1)(qq-pp)$, ou bien celle-ci, $(ppqq-1)(\frac{11}{pp}-1)$, & on y parvient en faisant $pq = \frac{ff+gg}{2fg}$ & $\frac{1}{p} = \frac{hh+kk}{2hk}$, puis que dans ce cas chaque facteur devient séparément un carré. Pour s'en convaincre, on remarquera que $qq = \frac{ff+gg}{2fg} \times \frac{hh+kk}{2hk}$, que par conséquent le produit de ces deux fractions doit être un carré, qu'il doit l'être aussi étant multiplié par $4ffgg.hhkk$, moyennant quoi il devient $=fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; ensuite, que cette formule devient tout-à-fait semblable à celle qu'on a trouvée précédemment, si l'on fait $f=a+b$, $g=a-b$, $h=c+d$ & $k=c-d$; puisqu'alors on a $2(a^2-b^2)$, $2(c^2-d^2)=4(a^2-b^2)(c^2-d^2)$, ce qui a lieu, comme nous avons vu, quand $aa=9$, $bb=4$, $cc=81$ & $dd=49$, ou $a=3$, $b=2$, $c=9$

& $d=7$. Ainsi $f=3$, $g=1$, $h=16$ & $k=2$, d'où résulte $pq=\frac{13}{3}$ & $\frac{1}{p}=\frac{260}{64}=\frac{65}{16}$; le produit de ces deux équations donne $qq=\frac{65.13}{16.3}=\frac{13.13}{16}$, donc $q=\frac{13}{4}$, & il s'ensuit que $p=\frac{4}{3}$, moyennant cela nous avons $\frac{x}{z}=\frac{pp+1}{pp-1}=\frac{41}{9}$, & $\frac{y}{z}=\frac{gg-1}{gg+1}=\frac{18}{113}$; puis donc que $x=-\frac{41z}{9}$ & $y=\frac{18z}{113}$, faisons, à l'effet d'obtenir des nombres entiers, $z=153$, & nous aurons $x=-697$ & $y=185$. Donc enfin les trois nombres quarrés cherchés sont

$$\begin{aligned} xx &= 485809, & \text{ \& en effet } xx-yy &= 451584=(672)^2 \\ yy &= 34225, & yy-xx &= 10816=(104)^2 \\ zz &= 23409, & xx-xx &= 462400=(680)^2. \end{aligned}$$

Il est évident de plus que ces quarrés sont beaucoup plus petits que ceux que nous eussions trouvés, en quarrant les trois nombres x , y & z de la solution précédente.

237.

On nous objectera sans doute ici que cette solution n'a été trouvée que par un simple tâtonnement, puisque nous avons fait usage de la table de l'art. 235. Mais nous répondrons que nous ne nous sommes

servi de ce moyen, qu'afin de parvenir aux plus petits nombres possibles; car si on vouloit ne pas avoir égard à la brièveté, il seroit facile, moyennant les regles données ci-dessus, de trouver une infinité de solutions. En effet, ayant trouvé $\frac{p}{q} = \frac{pp+1}{pp-1}$ & $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1}$, nous avons réduit la question à celle de transformer en quarré le produit $(ppqq-1)(\frac{1}{p}-1)$; si donc nous faisons $\frac{1}{p} = m$ ou $q = mp$, notre formule deviendra $(mmp^4-1)(mm-1)$, ce qui est évidemment un quarré, quand $p=1$; mais de plus nous allons voir que cette valeur nous en fera connoître d'autres, si nous écrivons $p=1+f$; nous avons, en conséquence de cette supposition, à transformer la formule $(mm-1).(mm-1+4mmf+6mmff+4mmf^3+mmf^4)$; elle ne sera pas moins un quarré, si on la divise par $(mm-1)^2$; cette division nous donne $1 + \frac{4mmf}{mm-1} + \frac{6mmff}{mm-1} + \frac{4mmf^3}{mm-1} + \frac{mmf^4}{mm-1}$; & si pour abrégér nous faisons $\frac{mm}{mm-1} = a$, nous

aurons à réduire en quarré la formule $1 + 4af + 6aff + 4af^3 + af^4$. Que la racine en soit $1 + ff + gff$, dont le quarré est $1 + 2ff + 2gff + fff + 2fgf^3 + ggff^4$, & qu'on détermine f & g de maniere que les trois premiers termes s'évanouissent, favoir en faisant $4a = 2f$ ou $f = 2a$, & $6a = 2g$ ou $g = \frac{6a-f}{2} = 3a - 2a$, les deux derniers termes fourniront l'équation $4a + af = 2fg + ggff$, d'où résulte $f = \frac{4a-2f}{8g-a} = \frac{4a-12a+8a^2}{4a^2-12a+9a-a} = \frac{4-12a+8a^2}{4a^2-12a+9a-1}$, ou $f = \frac{4(2a-1)}{4a^2-8a+1}$, si on divise la fraction précédente par $a-1$. Cette valeur est déjà suffisante pour nous donner une infinité de solutions; parce que le nombre m , dans la valeur de a , $= \frac{mm}{mm-1}$, peut se prendre à volonté: c'est ce qu'il est à propos d'éclaircir par quelques exemples.

I. Soit $m=2$, on aura $a = \frac{4}{3}$; ainsi $f = 4 \cdot \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1} = \frac{60}{23}$; donc $p = \frac{37}{23}$, & $q = \frac{9}{23}$; enfin $\frac{y}{z} = \frac{249}{410}$, & $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.
X iij

II.) Soit $m = \frac{3}{2}$, on aura $a = \frac{7}{2}$, & $f = 4$.
 $\frac{13}{11} = \frac{260}{11}$; par conséquent $p = \frac{249}{11}$, &
 $q = \frac{247}{11}$; au moyen de quoi l'on peut dé-
 terminer les fractions $\frac{p}{q}$ & $\frac{q}{p}$.

Il est un cas particulier qui mérite que
 nous y fassions attention; c'est celui où a
 est un carré, & il a lieu, par exemple,
 quand $m = \frac{1}{2}$, puisqu'alors $a = \frac{25}{16}$. Si nous
 faisons encore ici, pour abrégé, $a = bb$,
 en sorte que notre formule soit $1 + 4bbf$
 $+ 6bbff + 4bbf^2 + bb^2f^2$, nous pourrions la
 comparer avec le carré de $1 + 2bbf + bff$,
 c'est-à-dire avec $1 + 4bbf + 2bfff + 4b^2ff$
 $+ 4b^2f^2 + bb^2f^2$; & effaçant de part &
 d'autre les deux premiers termes & le der-
 nier, & divisant les autres par fff , nous au-
 rons $6bb + 4bbf = 2b + 4b^2 + 4b^2f$, d'où
 résulte $f = \frac{6bb + 2b - 4b^2}{4b^2 - 4bb} = \frac{3b - 1 - 2b^2}{2bb - 2b}$;
 ou bien cette fraction étant divisible en-
 core par $b-1$, nous aurons enfin $f = \frac{1-2bb-2bb^2}{2b}$
 & $p = \frac{1-2bb}{2b}$.

Remarquons que nous aurions aussi pu
 adopter $1 + 2bf + bff$ pour la racine de notre
 formule, le carré du trinôme étant $1 + 4bf$
 $+ 2bff + 4bbff + 4bbf^2 + bb^2f^2$, nous aurions
 effacé le premier & les deux derniers ter-
 mes; & divisant les autres par f , nous se-
 rions parvenus à l'équation $4bb + 6bbf = 4b$
 $+ 2bf + 4bbf$. Mais comme $bb = \frac{25}{16}$, & b
 $= \frac{5}{4}$, cette équation nous auroit donné f
 $= -1$ & $p = -1$; par conséquent $pp - 1$
 $= 0$, & nous n'aurions pu tirer de là au-
 cune conclusion, puisque p deviendrait $= 0$.

Pour revenir donc à la solution précé-
 dente, qui a donné $p = \frac{1-2bb}{2b}$, comme b
 $= \frac{5}{4}$, elle nous indique que si $m = \frac{1}{2}$, on a
 $p = \frac{17}{20}$, & $q = mp = \frac{17}{16}$, par conséquent $\frac{p}{q}$
 $= \frac{689}{111}$, & $\frac{q}{p} = \frac{433}{143}$.

238.

Dix-septième question. On cherche trois
 nombres carrés, tels que la somme de
 chaque couple soit un carré.

Puisque ce sont les trois formules $xx + yy$,
 $xx + zz$ & $yy + zz$, qu'il s'agit de trans-

former, divisons-les par $\frac{1}{11}$, afin d'avoir ces trois autres :

$$I.) \frac{x^2}{11} + \frac{yz}{11} = 0, II.) \frac{yz}{11} + 1 = 0,$$

$$III.) \frac{yz}{11} + 1 = 0.$$

On satisfait aux deux dernières, en faisant $\frac{x}{11} = \frac{2p-1}{2p}$ & $\frac{y}{11} = \frac{q-1}{2q}$, & la première formule se change par-là en celle-ci, $\frac{(pp-1)^2}{4pp} + \frac{(qq-1)^2}{4qq}$, qui doit aussi être un carré, si on la multiplie par $4ppqq$, c'est-à-dire qu'il faut que $qq(pp-1)^2 + pp(qq-1)^2 = 0$; or c'est ce qui ne peut guère s'obtenir, à moins qu'on ne connoisse d'ailleurs un cas où cette formule devient un carré; & comme il est difficile aussi de trouver un semblable cas, il faudra avoir recours à d'autres artifices, dont nous allons rapporter quelques-uns.

I.) Comme la formule en question peut s'exprimer ainsi, $qq(p+1)^2(p-1)^2 + pp(q+1)^2(q-1)^2 = 0$, qu'on fasse en sorte qu'elle soit divisible par le carré $(p+1)^2$; on l'obtient en faisant $q-1 = p+1$, ou $q = p+2$, car alors $q+1 = p+3$, & la

formule devient $(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2(p+1)^2 = 0$; de sorte qu'en divisant par $(p+1)^2$, on a $(p+2)^2(p-1)^2 + pp(p+3)^2$, ce qui doit être un carré, & à quoi on peut donner la forme $2p^2 + 8p^2 + 6pp - 4p + 4$. Or le dernier terme étant ici un carré, supposons que la racine de la formule soit $2 + fp + gpp$, ou $gpp + fp + 2$, dont le carré est $ggp^2 + 2fgp + 4gpp + fffp + 4fp + 4$; & nous chasserons les trois derniers termes, en faisant $-4 = 4f$ ou $f = -1$, & $g^2 = 4g + 1$ ou $g^2 - 4g - 1 = 0$; les premiers termes étant divisés par p^2 , donneront ensuite $2p + 8 = ggp + 2fg = \frac{25}{16}p - \frac{1}{4}$; nous trouvons par-là $p = \frac{24}{15}$ & $q = \frac{26}{15}$; donc enfin $\frac{x}{11} = \frac{2p-1}{2p} = \frac{24-1}{24} = \frac{23}{24}$, ou $x = \frac{575}{48}$, & $\frac{y}{11} = \frac{q-1}{2q} = \frac{26-1}{26} = \frac{25}{26}$, ou $y = \frac{483}{46}$.

Faisons maintenant $z = 16.3.11$, nous aurons $x = 575.11$ & $y = 483.12$, & par conséquent les racines des trois carrés que nous cherchons, seront :

$$x=6325=11.23.25; y=5796=12.21.23;$$

$$z=528=3.11.16;$$

car il en résulte:

$$xx+yy=23^2(275^2+252^2)=23^2.373^2.$$

$$xx+zz=11^2(575^2+48^2)=11^2.577^2.$$

$$yy+zz=12^2(483^2+44^2)=12^2.485^2.$$

II.) On peut obtenir encore d'une infinité de manières, que notre formule soit divisible par un carré; qu'on suppose, par exemple, $(q+1)^2=4(p+1)^2$, ou $q+1=2(p+1)$, c'est-à-dire $q=2p+1$ & $q-1=2p$, la formule deviendra $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp.4(p+1)^2(4pp)=\square$, ce qu'on peut diviser par $(p+1)^2$, moyennant quoi l'on a $(2p+1)^2(p-1)^2+16p^2=\square$, ou $20p^2-4p^2-3pp+2p+1=\square$, mais de quoi on ne peut tirer aucun parti.

III.) Faisons donc plutôt $(q-1)^2=4(p+1)^2$, ou $q-1=2(p+1)$, nous aurons $q=2p+3$ & $q+1=2p+4$, ou $q+1=2(p+2)$ & nous obtiendrons, après avoir divisé notre formule par $(p+1)^2$, cette autre formule: $(2p+3)^2(p-1)^2+16pp$

$(p+2)^2$ ou $9-6p+5pp+68p^2+20p^3$; que la racine en soit $3-p+gpp$, dont le carré est $9-6p+6gpp+pp^2-2gp^2+ggp^2$; les deux premiers termes s'évanouissent, & nous chassons le troisième en faisant $33=6g+1$, ou $g=\frac{32}{3}$; ainsi les autres termes se divisent par p & donnent $20p+68=ggp-2g$; ou $\frac{32^2}{3}=496p$; donc $p=\frac{48}{33}$ & $q=\frac{789}{31}$, au moyen de quoi nous obtenons une nouvelle solution.

IV.) Si l'on veut faire $q-1=\frac{4}{3}(p-1)$, on a $q=\frac{4}{3}p-\frac{1}{3}$ & $q+1=\frac{4}{3}p+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}(2p+1)$, & la formule après avoir été divisée par $(p-1)^2$, devient $(\frac{42-1}{9})(p+1)^2+\frac{64}{81}pp(2p+1)^2$, multipliant par 81, on a $9(4p^2-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2=400p^4+472p^3+73pp-54p+9$, où le premier & le dernier terme sont l'un & l'autre des carrés. Qu'on suppose donc la racine $=20pp-9p+3$, dont le carré est $400p^4-360p^3+110pp+81pp-54p+9$, on aura $472p+73=360p+201$; donc $p=\frac{2}{13}$, & $q=\frac{8}{39}-\frac{1}{13}$.

On auroit aussi pu prendre pour racine $20pp+9p-3$, ce qui est celle de $400p^4+360p^3-120pp^2-81pp-54p+9$; mais en comparant ce carré avec notre formule, on auroit trouvé $472p+73=360p-39$, & par conséquent $p=-1$; valeur qui ne peut nous servir.

V.) On peut faire aussi que notre formule soit même divisible par les deux carrés $(p+1)^2$ & $(p-1)^2$ en même tems. Qu'on fasse pour cet effet $q = \frac{pe+1}{p+1}$, de sorte que $q+1 = \frac{pe+p+1+1}{p+1} = \frac{(p+1)(e+2)}{p+1}$, & $q-1 = \frac{pe-p-1+1}{p+1} = \frac{(p-1)(e-1)}{p+1}$, la formule se divisera par $(p+1)^2(p-1)^2$, & se réduira à $\frac{(pe+1)^2}{(p+1)^2} + \frac{pp^2(e+1)^2(e-1)^2}{(p+1)^2}$; si on multiplie par $(p+1)^2$, il faudra, comme auparavant, que la formule puisse devenir un carré; & on aura $(pe+1)^2(p+1)^2 + pp^2(e+1)^2(e-1)^2$, ou $up^4+2i(u+1)p^3+2upp+(e+1)^2pp+(e-1)^2pp+2i(u+1)p+u$, où le premier & le dernier termes sont des carrés. Qu'on prenne donc pour racine $upp+(u+1)p-e$, ce

qui est celle du carré $up^4+2i(u+1)p^3+2upp+(u+1)^2pp-2i(u+1)p+u$, on aura, en comparant, $2iep+(e+1)^2p+(e-1)^2p+2i(u+1)=2up+(u+1)^2p-2i(u+1)$, ou $4up+(u-1)^2p+4i(u+1)=0$, ou $(e+1)^2p+4i(u+1)=0$, c'est-à-dire $u+1 = \frac{-4i}{e+1}$; de-là résulte $p = \frac{-4e}{e+1}$; par conséquent $pe+1 = \frac{-4e+1}{e+1}$, & $p+1 = \frac{e^2-3e}{e+1}$; enfin aussi $q = \frac{-3e+1}{e^2-3e}$, & la lettre e est arbitraire.

Soit, par exemple, $e=2$, on aura $p = \frac{-8}{3}$ & $q = \frac{-1}{3}$; ainsi $\frac{pe-1}{p} = \frac{2p-1}{2p} = \frac{1}{2}$, & $\frac{e^2-1}{e} = \frac{3}{2}$, ou $x = \frac{3-13}{4-1} = \frac{9-13}{3}$ & $y = \frac{9-13}{4-1} = \frac{9-13}{3}$. Si de plus $e=4.4.5.11$, on a $x=3.13.11$ & $y=4.5.9.13$, & les racines des trois carrés cherchés sont $x=3.11.13=429$, $y=4.5.9.13=2340$, & $z=4.4.5.11=880$. On voit qu'elles sont encore plus petites que celles que nous avons trouvées ci-dessus, & il en résulte

$$\begin{aligned} xx+yy &= 3^2.13^2(121+3600)=3^2.13^2.61^2, \\ xx+zz &= 11^2.(1521+6400)=11^2.89^2, \\ yy+zz &= 20^2.(13689+1936)=20^2.125^2. \end{aligned}$$

VI.) Une dernière remarque que nous ferons au sujet de cette question, c'est que chaque solution en fournit aisément une nouvelle; car lorsqu'on a trouvé trois valeurs, $x=a$, $y=b$ & $z=c$, de sorte que $aa+bb=\square$, $aa+cc=\square$, & $bb+cc=\square$, les trois valeurs suivantes satisferont pareillement, savoir $x=ab$, $y=bc$ & $z=ac$. Il faut que

$$\begin{aligned}xx+yy &= aabb+bbcc=bb(aa+cc)=\square, \\xx+zz &= aabb+aaac=aa(bb+cc)=\square, \\yy+zz &= aacc+bbcc=cc(aa+bb)=\square.\end{aligned}$$

Or, comme nous venons de trouver $x=a=3.11.13$, $y=b=4.5.9.13$ & $z=c=4.4.5.11$, nous avons d'après la nouvelle solution,

$$\begin{aligned}x=ab &= 3.4.5.9.11.13.13, \\y=bc &= 4.4.4.5.5.9.11.13, \\z=ac &= 3.4.4.5.11.11.13.\end{aligned}$$

Et toutes ces trois valeurs étant divisibles par 3.4.5.11.13, se réduisent aux suivantes, $x=9.13$, $y=3.4.4.5$ & $z=4.11$, ou $x=117$, $y=240$ & $z=44$, qui sont encore moindres que celles qu'a données la solution précédente, & il en résulte

$$\begin{aligned}xx+yy &= 71289=267^2, \\xx+zz &= 15625=125^2, \\yy+zz &= 59536=244^2.\end{aligned}$$

239.

Dix-huitième question. On cherche deux nombres x & y , tels que l'un ajouté au carré de l'autre, produise un carré; c'est-à-dire que $xx+y$ & $yy+x$ soient des carrés.

Si on vouloit commencer par supposer $xx+y=pp$, & en déduire $y=pp-xx$, on auroit pour l'autre formule $p^2-2ppx+x^2=\square$, & on auroit de la peine à la résoudre.

Qu'on suppose donc en même tems l'une des deux formules $xx+y=(p-x)^2=pp-2px+xx$, & l'autre $yy+x=(q-y)^2=qq-2qy+yy$, on obtiendra par-là les deux équations suivantes, I.) $y+2px=pp$, & II.) $x+2qy=qq$, desquelles on tire aisément $x=\frac{2pp-qq}{4pq-1}$ & $y=\frac{2qq-pp}{4pq-1}$, où p & q sont indéterminés. Qu'on suppose donc, par exemple, $p=2$ & $q=3$, on aura les

deux nombres cherchés $x = \frac{21}{23}$ & $y = \frac{32}{23}$,
 moyennant quoi $xx + y = \frac{221}{519} + \frac{32}{23} = \frac{961}{519}$
 $= \left(\frac{31}{23}\right)^2$, & $yy + x = \frac{1024}{519} + \frac{21}{23} = \frac{7169}{519} = \left(\frac{37}{23}\right)^2$.

Si on faisoit $p=1$ & $q=3$, on auroit
 $x = -\frac{3}{11}$ & $y = \frac{17}{11}$, solution qu'on pourroit
 ne pas admettre, parce que l'un des nom-
 bres cherchés se trouve négatif.

Mais soit $p=1$ & $q=\frac{3}{2}$, nous aurons
 $x = \frac{3}{20}$ & $y = \frac{7}{10}$, d'où nous dérivons xx
 $+ y = \frac{9}{400} + \frac{7}{10} = \frac{289}{400} = \left(\frac{17}{20}\right)^2$, & $yy + x$
 $= \frac{49}{100} + \frac{3}{20} = \frac{64}{100} = \left(\frac{8}{10}\right)^2$.

240.

Dix-neuvième question. Trouver deux
 nombres dont la somme soit un carré,
 & dont les carrés ajoutés ensemble pro-
 duisent un bi-carré.

Nommons ces nombres x & y , & puis-
 que $xx + yy$ doit devenir un bi-carré,
 commençons par en faire un quarté, en
 supposant $x = pp - qq$ & $y = 2pq$, au
 moyen de quoi $xx + yy = (pp + qq)^2$. Or,
 pour

pour que ce carré devienne un bi-carré,
 il faut que $pp + qq$ soit un carré; con-
 tinuons donc en faisant $p = rr - ff$ & q
 $= 2rf$, afin que $pp + qq = (rr + ff)^2$; &
 présentement nous avons $xx + yy = (rr$
 $+ ff)^4$, ce qui est un bi-carré. Or, sui-
 vant ces suppositions, nous avons $x = r^2$
 $- 6rrff + f^4$ & $y = 4r^2f - 4rf^3$; il nous
 reste par conséquent à transformer en un
 carré la formule $x + y = r^2 + 4r^2f - 6rrff$
 $- 4rf^3 + f^4$.

Imaginons que sa racine soit $rr + 2rf$
 $+ ff$, ou la formule égale au carré r^2
 $+ 4r^2f + 6rrff + 4rf^3 + f^4$, nous pourrions
 effacer de part & d'autre les deux premiers
 & le dernier terme, & diviser les autres
 par ff , ainsi nous aurons, $6r + 4f = 6r$
 $- 4f$, ou $12r + 8f = 0$; de sorte que f
 $= -\frac{3}{2}r$. Nous pourrions aussi sur-
 poser la racine $= rr - 2rf + ff$, en éga-
 lant la formule au carré $r^2 - 4r^2f + 6rrff - 4rf^3$
 $+ f^4$; de cette manière le premier & les
 deux derniers termes se détruisant des deux
 côtés, nous aurions, en divisant par rrf ,

les autres termes, $4r - 6f = -4r + 6f$,
ou $8r = 12f$; par conséquent $r = \frac{3}{2}f$; ainsi
dans cette seconde supposition si $r = 3$ &
 $f = 2$, nous trouverions $x = -119$, ou
une valeur négative.

Mais faisons à présent $r = \frac{3}{2}f + t$, nous
aurons pour notre formule

$$rr = \frac{9}{4}ff + 3ft + tt; r^3 = \frac{27}{8}f^3 + \frac{27}{4}ft^2 + \frac{9}{2}ftt + t^3.$$

Donc

$$r^4 = \frac{81}{16}f^4 + \frac{27}{4}f^3t + \frac{27}{4}f^2t^2 + \frac{9}{2}ft^3 + t^4$$

$$+ 4r^2t = \frac{27}{4}f^4 + 27f^3t + 18ff^2t + 4t^3$$

$$- 6rrf = -\frac{27}{4}f^4 - 18f^3t - 6ff^2t$$

$$- 4f^3 = -6f^4 - 4f^3t$$

$$+ f^4 = +f^4; \quad \&c \text{ par conséquent la formule}$$

$$\frac{1}{16}f^4 + \frac{27}{4}f^3t + \frac{11}{4}ff^2t + 10ft^3 + t^4.$$

Cette formule doit aussi être un carré,
si on la multiplie par 16, moyennant quoi
elle devient $f^4 + 296f^3t + 408ff^2t + 160ft^3$
 $+ 16t^4$. Egalons-la au carré de $ff + 148f$
 $- 4t$, c'est-à-dire à $f^4 + 296f^3t + 21896ff^2t$
 $- 1184ft^3 + 16t^4$; nous voyons les deux
premiers termes & le dernier se détruire
des deux côtés, & nous parvenons par-là

à l'équation $21896f - 1184t = 408f + 160t$,
qui fournit $\frac{f}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}$. Puis donc
que $f = 84$ & $t = 1343$, nous aurons r
 $= \frac{3}{2}f + t = 1469$, & par conséquent $x = r^4$
 $- 6rrf + f^4 = 4565486027761$, & $y = 4r^3f$
 $- 4f^3 = 1061652293520$.

CHAPITRE XV.

*Solutions de quelques Questions où l'on
demande des Cubes.*

241.

Nous avons traité dans le Chapitre pré-
cédent quelques questions où il s'agissoit de
faire en sorte que certaines formules de-
vinssent des carrés, & elles nous ont donné
occasion de développer différens artifices
que demande l'application des regles que
nous avons données plus haut; Il nous reste
à présent à considérer des questions qui rou-
lent sur la transformation de certaines for-
mules en cubes, les solutions qui vont suivre

répandront du jour sur les regles que nous avons auffi indiquées plus haut pour les transformations de cette espece.

242.

Question premiere. On demande que la somme de deux cubes, x^3 & y^3 , soit un cube.

Puisque $x^3 + y^3$ doit être un cube, il faut qu'en divisant cette formule par le cube y^3 , le quotient soit pareillement un cube, ou que $\frac{x^3}{y^3} + 1 = C$. Soit donc $\frac{x}{y} = z - 1$, nous aurons $z^3 - 3zz + 3z = C$. Si nous voulions maintenant, en suivant les regles données plus haut, supposer ici la racine cubique $= z - u$, & en comparant la formule avec le cube $z^3 - 3uz^2 + 3u^2z - u^3$, déterminer u de façon que le second terme aussi s'évanouit, nous aurions $u = 1$ & les autres termes, formant l'équation $3z = 3uz^2 - u^3 = 3z - 1$; nous trouverions $z = \infty$, d'où nous ne pourrions rien conclure. Laissons donc plutôt u indéterminé, & tirons z de l'équa-

tion quarrée $-3zz + 3z = -3uz^2 + 3uz^2 - u^3$, ou $3uz^2 - 3zz = 3uz^2 - 3z - u^3$, ou $3(u-1)zz = 3(uu-1)z - u^3$, ou $zz = (u+1)\frac{u^3}{3(u-1)}$; nous trouverons

$$z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{uu+2u+1}{4} - \frac{u^3}{3(u-1)}}$$

ou $z = \frac{u+1}{2} \pm \sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}$; la

question se réduit par conséquent à transformer en quarré la fraction qui est sous ce signe radical. Multiplions d'abord pour cet effet les deux termes par $3(u-1)$, afin que le dénominateur devenant un quarré, favoir $36(u-1)^2$, nous n'ayons à traiter que le numérateur $-3u^4+12u^3-18uu+9$. Comme le dernier terme est un quarré, nous supposerons la formule, conformément à la regle, égale au quarré de $guu+fu+3$, c'est-à-dire à $ggu^4+2fgu^3+6guu+6fu+9$, nous ferons disparaître $+ffuu$

les trois derniers termes, en faisant $0=6f$ ou $f=0$, & $6g+ff=-18$, ou $g=-3$;

& l'équation qui reste, savoir $-3u+12=9u+2f$, donnera $u=1$. Mais cette valeur ne nous apprend encore rien; ainsi nous continuerons en écrivant $u=1+t$; or notre formule devenant dans ce cas $-12f-3t^2$, ce qui ne peut être un carré, à moins que t ne soit négatif, faisons aussi-tôt $t=-f$; nous avons par ce moyen la formule $12f-3f^2$, qui devient un carré dans le cas de $f=1$. Mais nous voici arrêtés de nouveau; car dans ce cas de $f=1$, on a $t=-1$ & $u=0$, d'où l'on ne peut conclure autre chose, si ce n'est que de quelque manière qu'on s'y prenne, on ne trouvera jamais une valeur qui fasse parvenir au but qu'on se propose; & l'on peut en inférer déjà avec assez de confiance, qu'il est impossible de trouver deux cubes dont la somme soit un cube; on s'en convaincra entièrement par la démonstration suivante.

243.

Théoreme. Il n'est pas possible de trouver deux cubes dont la somme ou bien la différence soit un cube.

Nous commencerons par faire observer que si l'impossibilité dont nous parlons a lieu pour la somme, elle a lieu aussi pour la différence de deux cubes. En effet, s'il est impossible que $x^3+y^3=z^3$, il est impossible aussi que $x^3-y^3=z^3$; or x^3-y^3 est la différence de deux cubes; donc, &c. Cela posé, il suffira de démontrer l'impossibilité en question, soit de la somme seulement, soit de la différence; or voici la suite des raisonnemens que cette démonstration exige.

I.) On peut regarder les nombres x & y comme premiers entr'eux; car s'ils avoient un commun diviseur, les cubes seroient aussi divisibles par le cube de ce diviseur. Par exemple, soit $x=2a$ & $y=2b$, on auroit $x^3+y^3=8a^3+8b^3$; or si cette formule est un cube, a^3+b^3 en est aussi un.

II.) Puis donc que x & y n'ont point de facteur commun, ces deux nombres sont ou impairs tous les deux, ou bien l'un est pair & l'autre est impair. Dans le premier cas il faudroit que z fût pair, & dans l'autre ce nombre seroit impair. Par conséquent de ces trois nombres x , y & z , il y en a toujours un qui est pair & deux qui sont impairs; & il nous suffira donc pour notre démonstration de considérer le cas où x & y sont tous deux impairs, parce qu'il est indifférent de prouver l'impossibilité dont il s'agit pour la somme ou pour la différence, & qu'il arrive seulement que la somme devient la différence, lorsqu'une des racines est négative.

III.) Si donc x & y sont impairs, il est clair que tant leur somme que leur différence sera un nombre pair. Soit donc $\frac{x+y}{2} = p$ & $\frac{x-y}{2} = q$, nous aurons $x = p+q$ & $y = p-q$, d'où il suit que l'un des deux nombres p & q doit être pair & que l'autre doit être impair. Or nous avons $x^2 + y^2 = 2p^2 + 6pqq = 2p(pp+3qq)$; de sorte qu'il

s'agit de prouver que ce produit $2p(pp+3qq)$ ne peut devenir un cube; & si la démonstration devoit se rapporter à la différence, on auroit $x^2 - y^2 = 6ppq + 2q^3 = 2q(qq+3pp)$, formule tout-à-fait la même que la précédente, si on met p & q à la place l'un de l'autre. Par conséquent il suffit pour notre question de démontrer l'impossibilité de la formule $2p(pp+3qq)$, puisqu'il s'ensuivra nécessairement que ni la somme ni la différence de deux cubes ne peut devenir un cube.

IV.) Si donc $2p(pp+3qq)$ étoit un cube, ce cube seroit pair, & par conséquent divisible par 8; donc il faudroit que la huitième partie de notre formule, ou $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$, fût un nombre entier & outre cela un cube. Or nous savons que l'un des nombres p & q est pair, & l'autre impair; ainsi $pp+3qq$ doit être un nombre impair, qui n'étant point divisible par 4, il faut que p le soit, ou que $\frac{p}{4}$ soit un nombre entier.

V.) Mais afin que le produit $\frac{p}{4}(pp+3qq)$ soit un cube, il faut que chacun de ces

facteurs, s'ils n'ont point de diviseur commun, soit un cube séparément; car si un produit de deux facteurs qui sont premiers entr'eux, doit être un cube, il faut nécessairement que chacun soit de soi-même un cube; le cas est différent & demande une considération particulière, si ces facteurs ont un diviseur commun. Ainsi la question est ici de savoir si les deux facteurs p & $pp+3qq$ ne pourroient pas avoir un diviseur commun? Pour y répondre, il faut considérer que si ces facteurs ont un diviseur commun, les nombres pp & $pp+3qq$ auront le même diviseur; que la différence aussi de ces nombres, qui est $3qq$, aura le même diviseur commun avec pp , & que, puisque p & q sont premiers entre eux, ces nombres pp & $3qq$ ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 3, ce qui a lieu quand p est divisible par 3.

VII.) Nous avons par conséquent deux cas à examiner: l'un est celui où les facteurs p & $pp+3qq$ n'ont point de commun diviseur, ce qui arrive toujours, lorsque

p n'est pas divisible par 3; l'autre cas est celui où ces facteurs ont un diviseur commun, & il a lieu quand p peut se diviser par 3; parce qu'alors les deux nombres sont divisibles par 3. Nous avons besoin de distinguer soigneusement ces deux cas l'un de l'autre, parce qu'ils exigent chacun une démonstration particulière.

VII.) *Premier cas.* Que p ne soit pas divisible par 3, & que par conséquent nos deux facteurs p & $pp+3qq$ soient premiers entr'eux, de sorte que chacun en particulier doive être un cube. Pour faire d'abord que $pp+3qq$ devienne un cube, il n'y a, comme nous l'avons vu plus haut, qu'à supposer $p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3$ & $p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3$, ce qui donne $pp+3qq=(t+3uu)^3$ ou un cube. Or par-là $p=t^3-9tuu=t(t-9uu)$, & $q=3tu-t^3=3u(t-uu)$. Puis donc que q est un nombre impair, il faut que t aussi soit impair, & par conséquent que u aussi soit pair, parce que sans cela $t-uu$ seroit pair.

VIII.) Maintenant que nous avons transféré $pp+3qq$ en cube, & que nous avons trouvé $p=t(u-9u)=t(t+3u)(t-3u)$, il s'agit aussi que $2p$ soit un cube; ou, ce qui revient au même, que la formule $2t(t+3u)(t-3u)$ soit un cube. Or nous avons à observer ici que t est un nombre pair & non divisible par 3; puisqu'autrement p seroit divisible par 3; ce qu'on a expressément supposé n'être pas; ainsi les trois facteurs, $2t$, $t+3u$ & $t-3u$, sont premiers entr'eux, & il faudroit que chacun d'eux fût un cube en particulier. Si donc nous faisons $t+3u=f^3$ & $t-3u=g^3$, nous aurons $2t=f^3+g^3$. Si donc $2t$ est un cube, nous aurons deux cubes f^3 & g^3 , dont la somme seroit un cube, & qui seroient évidemment beaucoup plus petits que les cubes x^3 & y^3 adoptés au commencement; car comme nous avons d'abord fait $x=p+q$ & $y=p-q$, & que nous venons à présent de déterminer p & q par les lettres t & u , il faut nécessairement que

les nombres x & y soient beaucoup plus grands que t & u .

IX.) Si donc il existoit dans de grands nombres deux cubes tels que nous les demandons, on pourroit aussi assigner en de moindres nombres deux cubes dont la somme seroit un cube, & on pourroit parvenir de la même manière à des cubes toujours plus petits. Or comme il est très-certain qu'il n'y a point de ces cubes dans les petits nombres, il s'ensuit qu'il n'y en a point non plus dans les plus grands. Cette conclusion se confirme par celle que fournit le second cas & qui est la même; comme on va voir.

X.) *Second cas.* Supposons à présent que p soit divisible par 3, & que q ne le soit pas, & faisons $p=3r$, notre formule deviendra $\frac{1}{4} \cdot (9rr+3qq)$, ou $\frac{2}{4}r(3rr+qq)$; & ces deux facteurs sont premiers entr'eux, vu que $3rr+qq$ n'est divisible ni par 2 ni par 3, & que r doit être pair aussi bien que p ; c'est pourquoi chacun de ces deux facteurs doit être un cube en particulier.

XI.) Or en transformant le second facteur $3rr + qq$ ou $qq + 3rr$, nous trouvons de la même manière que ci-dessus $q = t(u - 9uu)$ & $r = 3u(u - uu)$; & il faut remarquer que puisque q étoit impair, t doit être ici pareillement un nombre impair, & que u doit être pair.

XII.) Mais il faut aussi que $\frac{2r}{4}$ soit un cube; ou en multipliant par le cube $\frac{8}{27}$, que $\frac{2r}{8}$ ou $2u(u - uu) = 2u(t + u)(t - u)$, soit un cube; & comme ces trois facteurs sont des nombres premiers entr'eux; il faut que chacun par lui-même soit un cube. Supposons donc $t + u = f^3$ & $t - u = g^3$, il s'ensuivra $2u = f^3 - g^3$, c'est-à-dire que si $2u$ étoit un cube, $f^3 - g^3$ seroit un cube. On auroit par conséquent deux cubes f^3 & g^3 beaucoup plus petits que les premiers, dont la différence seroit un cube, & par-là même on connoitroit aussi deux cubes dont la somme seroit un cube, puisqu'on n'auroit qu'à faire $f^3 - g^3 = h^3$ pour avoir $f^3 = h^3 + g^3$, ou un cube égal à la somme de deux cubes. Voilà donc la conclusion précédente pleinement

confirmée; c'est-à-dire qu'on ne peut assigner même par les plus grands nombres deux cubes tels, que leur somme ou leur différence soit un cube, & cela par la raison qu'on ne rencontre point de cubes de cette espèce dans les plus petits nombres.

244.

Puis donc qu'il est impossible de trouver deux cubes dont la somme ou la différence soit un cube, notre première question tombe d'elle-même; aussi a-t-on coutume plutôt de commencer dans cette matière par la question de déterminer trois cubes, dont la somme fasse un cube; mais en supposant que deux de ces cubes soient arbitraires, de sorte qu'il ne s'agit que de trouver le troisième; ainsi nous passerons immédiatement à cette question.

245.

Question deuxième. Deux cubes a^3 & b^3 étant donnés; on demande un troisième cube, tel que ces trois cubes ajoutés ensemble fassent un cube.

Il s'agit de transformer en cube la formule $a^3 + b^3 + x^3$; cela ne peut se faire à moins qu'on ne connoisse d'avance un cas satisfaisant; mais un cas de cette espèce se présente aussi-tôt, c'est celui de $x = -a$; qu'on fasse donc $x = y - a$, on aura $x^3 = y^3 - 3ayy + 3aay - a^3$; c'est par conséquent la formule $y^3 - 3ayy + 3aay + b^3$ qui doit devenir un cube; or le premier & le dernier terme étant ici des cubes, on trouve aussi-tôt deux solutions.

I.) La première demande qu'on fasse la racine de la formule $= y + b$, dont le cube est $y^3 + 3byy + 3bby + b^3$; on a de cette manière $-3ay + 3aa = 3by + 3bb$; & par conséquent $y = \frac{aa-bb}{a+b} = a-b$; mais $x = -b$; de sorte que cette solution ne nous est d'aucun usage.

II.) Mais on peut aussi prendre pour racine $b + fy$, dont le cube est $f^3y^3 + 3bffyy + 3bbfy + b^3$, & déterminer f de façon qu'aussi les troisièmes termes se détruisent, savoir en faisant $3aa = 3bbf$, on $f = \frac{aa}{bb}$; car alors on parvient à l'équation $y^3 - 3a$

$= f^3y^3$

$= f^3y + 3bff = \frac{a^3y}{b^3} + \frac{3a^4}{b^3}$, qui, multipliée par b^3 , devient $b^3y - 3ab^3 = a^3y + 3a^4b^3$, & donne $y = \frac{3a^4b^3 + 3ab^6}{b^3 - a^3} = \frac{3ab^3(a^3 + b^3)}{b^3 - a^3} = \frac{3ab^3}{b^3 - a^3}$, & par conséquent $x = y - a = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} = a \cdot \frac{2b^3 + a^3}{b^3 - a^3}$. Ainsi les deux

cubes a^3 & b^3 étant donnés, nous connoissons aussi la racine du troisième cube cherché; & si nous voulons que cette racine soit positive, nous n'avons qu'à supposer le cube b^3 plus grand que l'autre a^3 : faisons-en l'application à quelques exemples.

I.) Soient 1 & 8 les deux cubes donnés, en sorte que $a=1$ & $b=2$; la formule $9 + x^3$ deviendra un cube, si $x = \frac{17}{7}$; car on aura $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = \left(\frac{20}{7}\right)^3$.

II.) Soient les cubes donnés 8 & 27, de sorte que $a=2$ & $b=3$; la formule $35 + x^3$ fera un cube dans le cas de $x = \frac{124}{19}$.

III.) Que 27 & 64 soient les cubes donnés, c'est-à-dire que $a=3$ & $b=4$;

Tome II.

Z

la formule $91+x^3$ deviendra un cube, si $x = \frac{465}{37}$.

Si l'on vouloit déterminer pour deux cubes donnés d'autres troisiemes cubes, il faudroit pourfuivre en substituant $\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}$ $+ \gamma$ au lieu de x , dans la formule $a^3 + b^3 + x^3$; car on parviendroit par ce moyen à une formule semblable à la précédente, & qui fourniroit ensuite de nouvelles valeurs de γ ; mais on voit assez qu'on s'engageroit dans des calculs très-prolixes.

246.

Il se présente au reste dans cette question un cas remarquable, celui où les deux cubes donnés sont égaux, où $a=b$; car dans ce cas on a $x = \frac{3a^3}{0} = \infty$; c'est-à-dire qu'on n'a aucune solution; & voilà la raison pour laquelle on n'a pu encore résoudre le probleme de transformer en cube la formule $2a^3 + x^3$. Soit, par exemple $a=1$, ou que cette formule soit $2 + x^3$, on trou-

vera que quelques formes qu'on lui donne, ce sera toujours inutilement, & qu'on cherchera en vain une valeur de x qui satisfasse. On conclut de-là avec assez de certitude, qu'il est impossible de trouver un cube égal à la somme d'un cube & d'un double cube, ou bien que l'équation $2a^3 + x^3 = y^3$ est impossible; & comme cette équation donne $2a^3 = y^3 - x^3$, il seroit impossible aussi de trouver deux cubes dont la différence fût égale au double d'un autre cube; cette conséquence s'étend de même à la somme de deux cubes; & tout cela va être porté jusqu'à une évidence complete par la démonstration qui suit.

247.

Théoreme. Ni la somme ni la différence de deux cubes ne peut devenir égale au double d'un autre cube; cela veut dire que la formule $x^3 + y^3 = 2z^3$ est toujours impossible, si ce n'est dans le cas évident $y=x$.

On peut encore ici regarder x & y comme premiers entr'eux; car si ces nombres avoient un diviseur commun, il faudroit

Z ij

que z eût le même diviseur, & que toute l'équation, par conséquent, fût divisible par le cube de ce diviseur. Cela posé, comme $x^3 \pm y^3$ doit être un nombre pair, il faut que les nombres x & y soient impairs tous les deux, moyennant quoi tant leur somme que leur différence sera paire. Ainsi faisons $\frac{x+y}{2} = p$ & $\frac{x-y}{2} = q$, nous aurons $x = p + q$ & $y = p - q$, & il faudra que des deux nombres p & q l'un soit pair & l'autre impair. Or de-là il suit $x^3 + y^3 = 2p^3 + 6pq^2 = 2p(pp + 3qq)$, & $x^3 - y^3 = 6pq^2 + 2q^3 = 2q(3pp + qq)$, c'est-à-dire deux formules tout-à-fait semblables. Par conséquent il suffira de prouver que la formule $2p(pp + 3qq)$ ne peut devenir le double d'un cube, ou que $p(pp + 3qq)$ ne peut être un cube. On va voir comment nous nous y prendrons pour cette démonstration.

I.) Il se présente de nouveau deux cas différens à considérer : l'un où les deux facteurs p & $pp + 3qq$ n'ont point de commun diviseur, & doivent être un cube chacun séparément ; l'autre où ces facteurs ont un diviseur commun, lequel diviseur cepen-

dant, comme nous avons vu, ne peut être autre que 3.

II.) *Premier cas.* En supposant donc que p ne soit pas divisible par 3, & qu'ainsi les deux facteurs soient premiers entr'eux, nous réduirons d'abord $pp + 3qq$ en cube, en faisant $p = (u - guu)$ & $q = 3u(u - guu)$; moyennant cela il faudra seulement encore que p devienne un cube. Or z n'étant pas divisible par 3, puisqu'autrement p seroit aussi divisible par 3, les deux facteurs z & $u - guu$ sont premiers entr'eux, & par conséquent il faut que chacun en particulier soit un cube.

III.) Mais le dernier facteur à son tour a deux facteurs, savoir $z + 3u$ & $z - 3u$, qui sont des nombres premiers entr'eux, d'abord parce que z n'est pas divisible par 3, & en second lieu, parce que l'un des nombres z & u est pair, tandis que l'autre est impair ; car si ces nombres étoient impairs tous les deux, il faudroit que non-seulement p , mais aussi que q fût impair, ce qui ne se peut ; donc il faut que chacun de ces deux facteurs, $z + 3u$ & $z - 3u$ en particulier soit un cube.

IV.) Soit donc $t+3u=f^3$ & $t-3u=g^3$, nous aurons $2t=f^3+g^3$. Or t doit être un cube que nous désignerons par h^3 , moyennant quoi il faudroit que $f^3+g^3=2h^3$, par conséquent nous aurions deux cubes beaucoup moindres, savoir f^3 & g^3 , dont la somme seroit le double d'un cube.

V.) *Second cas.* Supposons à présent p divisible par 3, & conséquemment que q ne le soit pas.

Si nous faisons $p=3r$, notre formule devient $3r(9rr+3qq)=9r(3rr+qq)$, & ces facteurs étant maintenant des nombres premiers entr'eux, il faut que l'un & l'autre soient un cube.

VI.) Afin donc de transformer en cube le second, $qq+3rr$, nous ferons $q=2(u-9uu)$ & $r=3u(u-uu)$, & il faudra encore que l'un des nombres t & u soit impair & l'autre pair, vu qu'autrement les deux nombres q & r seroient pairs. Or nous obtenons par-là le premier facteur $9r=27u(u-uu)$; & comme il doit être un cube, il faut aussi qu'en le divisant par 27, la formule $u(u-uu)$, ou $u(t+u)(t-u)$, soit un cube.

VII.) Mais ces trois facteurs étant premiers entr'eux, il faut qu'ils soient tous eux-mêmes des cubes. Ainsi supposons pour les deux derniers $t+u=f^3$ & $t-u=g^3$, nous aurons $2u=f^3-g^3$; mais u devant être un cube, nous aurions de cette manière, en de bien plus petits nombres, deux cubes dont la différence seroit égale au double d'un autre cube.

VIII.) Puis donc qu'on ne peut assigner en petits nombres des cubes tels que leur somme ou leur différence soit un cube double, il est clair qu'il n'y a point de cubes de cette espèce, même parmi les plus grands nombres.

IX.) On objectera peut-être que notre conclusion pourroit induire en erreur; parce qu'il existe dans ces moindres nombres un cas satisfaisant, savoir celui de $f=g$. Mais on doit considérer que lorsque $f=g$, on a dans le premier cas $t+3u=t-3u$, & ainsi $u=0$; que par conséquent aussi $q=0$, & que comme nous avons supposé $x=p+q$ & $y=p-q$, il faudroit que les deux premiers cubes x^3 & y^3 eussent déjà été égaux

l'un & l'autre, lequel cas a été expressément excepté. De même, dans le second cas, si $f=g$, il faut que $u+v=u-v$, & pareillement $u=0$; donc aussi $r=0$ & $p=0$; donc les deux premiers cubes x^3 & y^3 deviendroient encore égaux, de quoi il n'est pas question dans le problème.

248.

Question troisieme. On demande en général trois cubes, x^3 , y^3 & z^3 , dont la somme soit égale à un cube.

Nous venons de voir qu'on peut supposer deux de ces cubes connus, & qu'on peut déterminer par-là le troisieme, pourvu qu'il n'y en ait pas deux d'égaux; mais la méthode précédente ne fournit dans chaque cas qu'une seule valeur pour le troisieme cube, & il seroit difficile d'en déduire de nouvelles.

Nous regarderons donc à présent les trois cubes comme inconnus; & afin de donner une solution générale, nous ferons $x^3+y^3+z^3=v^3$; nous transposerons un des premiers pour avoir $x^3+y^3=v^3-z^3$; & voici

comment nous satisferons à cette équation.

I.) Soit $x=p+q$ & $y=p-q$, nous aurons, comme nous avons vu, $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$. Soit de plus $v=r+f$ & $z=r-f$, nous aurons aussi $v^3-z^3=2f(ff+3rr)$; donc il faut que $2p(pp+3qq)=2f(ff+3rr)$, ou $p(pp+3qq)=f(ff+3rr)$.

II.) Nous avons vu plus haut qu'un nombre, tel que $pp+3qq$, ne peut avoir pour diviseurs que des nombres de la même forme. Puis donc que ces deux formules $pp+3qq$ & $ff+3rr$, doivent avoir nécessairement un diviseur commun, soit ce diviseur $=u+3uu$.

III.) Faisons en conséquence $pp+3qq=(ff+3gg)(u+3uu)$ & $ff+3rr=(hh+3kk)(u+3uu)$, & nous aurons $p=fi+3gu$ & $q=gi-fu$; par conséquent $pp=ffi+6fgiu+9gguu$ & $qq=ggii-2fgiu+f^2uu$, d'où résulte $pp+3qq=(ff+3gg)u+(3ff+9gg)uu$, ou bien $pp+3qq=(ff+3gg)(u+3uu)$.

IV.) Nous tirons de la même manière de l'autre formule, $f=hi+3ku$ & $r=ke$

— hu ; d'où résulte l'équation $(f+3gu)$
 $(ff+3gg)(u+3uu) = (h+3ku)(h+3kk)$
 $(u+3uu)$, qui, divisée par $u+3uu$, donne
 $f(ff+3gg)+3gu(ff+3gg) = h(h+3kk)$
 $+3ku(h+3kk)$, ou $f(ff+3gg) - h(h$
 $+3kk) = 3ku(h+3kk) - 3gu(ff+3gg)$,
 moyennant quoi $z = \frac{3k(h+3kk) - 3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg) - h(h+3kk)} u$.

V.) Chassons encore les fractions, en
 faisant $u = f(ff+3gg) - h(h+3kk)$,
 & nous aurons $z = 3k(h+3kk) - 3g$
 $(ff+3gg)$, où l'on peut donner telles
 valeurs qu'on veut aux lettres f, g, h & k .

VI.) Lors donc que nous aurons déter-
 miné par ces quatre nombres les valeurs
 de z & de u , nous aurons I.) $p = f+3gu$,
 II.) $q = g+fu$, III.) $r = h+3ku$, IV.) r
 $= k+hu$; de-là nous parviendrons en-
 fin à la solution de la question, $x = p+q$,
 $y = p-q$, $z = r-f$ & $v = r+f$; & cette
 solution est générale, au point qu'elle ren-
 ferme tous les cas possibles, vu que dans
 tout ce calcul on n'a admis aucune limi-
 tation arbitraire. Tout l'artifice consistoit
 à rendre notre équation divisible par u
 $+3uu$, moyennant quoi nous avons pu

déterminer les lettres z & u par une équa-
 tion du premier degré. On peut faire des
 applications sans nombre de nos formules :
 nous en donnerons quelques-unes pour
 exemples.

I.) Soit $k=0$ & $h=1$, on aura $z = -3g$
 $(ff+3gg)$, & $u = f(ff+3gg) - 1$; ainsi
 $p = -3g(ff+3gg) + 1/g(ff+3gg) - 3g$
 $= -3g$, & $q = -(ff+3gg)^2 + f$; de plus
 $r = 3g(ff+3gg)$, & $v = f(ff+3gg)$
 $+ 1$; par conséquent

$$x = -3g - (ff+3gg)^2 + f,$$

$$y = -3g + (ff+3gg)^2 - f,$$

$$z = (3g-f)(ff+3gg) + 1;$$

enfin $v = -(3g+f)(ff+3gg) + 1$.

Si outre cela nous supposons $f=1$
 & $g=1$, nous aurons $x = -20$, y
 $= 14$, $z = 17$ & $v = -7$; & de-là ré-
 sulte l'équation finale $-20^3 + 14^3 + 17^3$
 $= -7^3$, où $14^3 + 17^3 + 7^3 = 20^3$.

II.) Soit $f=2$, $g=1$, & par conséquent
 $ff+3gg=7$; de plus $h=0$ & $k=1$; ainsi
 $h+3k=3$; on aura $z = -12$ & $u = 14$;
 de sorte que $p = 2+3u=18$, $q = 2-2u$
 $= -40$, $r = z = -12$, & $f = 3u = 42$;

il en résultera $x=p+q=-22$, $y=p-q=58$, $z=r-f=54$, & $v=r+f=30$; donc $-22^3+58^3-54^3=30^3$, ou $58^3=30^3+54^3+22^3$; & comme toutes les racines sont divisibles par 2, on aura aussi $29^3=15^3+27^3+11^3$.

III.) Soit $f=3$, $g=1$, $h=1$ & $k=1$; en sorte que $ff+3gg=12$, & $hh+3kk=4$; & qu'ainsi $t=-24$ & $u=32$, ces deux valeurs sont divisibles par 8; & comme il ne s'agit ici que de leurs rapports, nous pouvons faire $t=-3$ & $u=4$. Nous obtenons par-là $p=3t+3u=+3$, $q=t-3u=-15$, $r=t-u=-7$ & $f=t+3u=+9$; par conséquent $x=-12$ & $y=18$; $z=-16$ & $v=2$, d'où provient $-12^3+18^3-16^3=2^3$, ou $18^3=16^3+12^3+2^3$, ou bien aussi, en divisant par le cube de 2, $9^3=8^3+6^3+1^3$.

IV.) Supposons aussi $g=0$ & $k=h$, au moyen de quoi nous laissons f & h indéterminées. Nous aurons $ff+3gg=ff$ & $hh+3kk=4hh$; ainsi $t=12h$ & $u=f-4h$; de plus $p=ft=12fh$, $q=-f^2+4fh^3$, $r=12h^4-hf^3+4h^4=16h^4-hf^3$, & f

$=3hf^3$; donc enfin $x=p+q=16fh-f^2$, $y=p-q=8fh+f^2$, $z=r-f=16h^4-4hf^3$, & $v=r+f=16h^4+2hf^3$. Si nous faisons maintenant $f=h=1$, nous avons $x=15$, $y=9$, $z=12$, & $v=18$, ou bien, en divisant tout par 3, $x=5$, $y=3$, $z=4$ & $v=6$; de façon que $3^3+4^3+5^3=6^3$. La progression de ces trois racines 3, 4, 5, augmentant de l'unité, est digne d'attention; c'est pourquoi nous rechercherons s'il y en a encore d'autres de la même espèce.

249.

Question quatrieme. On demande trois nombres qui forment une progression arithmétique, dont la différence soit 1, & qui soient tels que leurs cubes ajoutés ensemble reproduisent un cube.

Soit x le nombre ou le terme moyen, $x-1$ fera le plus petit & $x+1$ le plus grand; la somme des cubes de ces trois nombres est $3x^3+6x=3x(xx+2)$, & elle doit être un cube. Il nous faut ici d'avance un cas où cette propriété ait lieu, & nous

trouvons après quelques essais que ce cas est $x=4$.

Ainsi nous pouvons, d'après les règles établies plus haut, faire $x=4+y$; en sorte que $xx=16+8y+y^2$ & $x^3=64+48y+12yy+y^3$, & moyennant quoi notre formule devient $216+150y+36yy+3y^3$, où le premier terme est un cube, mais où le dernier ne l'est pas.

Supposons donc la racine $=6+fy$, ou la formule $=216+108fy+18ffyy+f^3y^3$, & faisons évanouir les deux seconds termes, en écrivant $150=108f$, ou $f=\frac{25}{18}$; les autres termes, divisés par yy , donneront $36+3y=18ff+f^3y=\frac{25^2}{18}+\frac{25^3}{18^2}y$, ou $18^2.36+18^2.3y=18^2.25^2+25^3y$, ou $18^2.36-18^2.25^2=25^3y-18^2.3y$; donc $y=\frac{18^2.36-18^2.25^2}{25^3-3.18^2}=\frac{18^2.(18.36-25^2)}{25^3-3.18^2}$, c'est-à-dire $y=\frac{-324.25}{1872}=\frac{-745^2}{1871}$, & par conséquent $x=\frac{32}{1871}$.

Comme on pourroit trouver embarrassant de poursuivre cette réduction en cubes,

il est bon d'observer que la question peut toujours se réduire à des quarrés. En effet, puisque $3x(xx+2)$ doit être un cube, qu'on suppose cette formule $=x^3y^3$, & on aura $3xx+6=xx^2y^3$, & par conséquent $xx=\frac{6}{y^3-3}=\frac{36}{6y^3-18}$. Or le numérateur de cette fraction étant déjà un quarré, nous n'avons besoin de transformer en quarré que le dénominateur $6y^3-18$, ce qui exige aussi qu'on ait trouvé un cas. Considérons pour cet effet que 18 est divisible par 9, mais que 6 est seulement divisible par 3, & qu'ainsi y pourra se diviser par 3; si nous faisons donc $y=3z$, notre dénominateur deviendra $=162z^3-18$, ce qui étant divisé par 9 & devenant $18z^3-2$, doit encore être un quarré; or c'est ce qui a lieu évidemment dans le cas de $z=1$. Ainsi nous ferons $z=1+v$, & il faudra que $16+54v+54vv+18v^3=\square$; que la racine en soit $4+\frac{27}{4}v$, dont le quarré est $16+54v+\frac{27^2}{16}vv$, il faudra que $54+18v=\frac{27^2}{16}$; ou $18v=-\frac{19}{16}$, ou $2v=-\frac{19}{16}$, & par conséquent $v=-\frac{19}{32}$; ce qui produit $z=1+v=\frac{17}{32}$, & après cela $y=\frac{51}{32}$.

Reprenons à présent le dénominateur $6y^4$
 $-18=162y^4-18=9(18y^4-2)$; puisque
 la racine quarrée du facteur $18y^4-2$ est 4
 $+ \frac{27}{4}y = \frac{107}{128}$, celle du dénominateur total
 est $\frac{321}{128}$; mais la racine du numérateur est 6;
 donc $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, valeur tout-à-fait dif-
 férente de celle que nous avons trouvée
 précédemment. Il s'ensuit que les racines
 de nos trois cubes cherchés sont I.) $x-1$
 $= \frac{149}{107}$, II.) $x = \frac{256}{107}$, III.) $x+1 = \frac{363}{107}$; &c la
 somme des cubes de ces trois nombres fera
 un cube dont la racine $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

Nous terminerons ici ce traité de l'Ana-
 lyse indéterminée, ayant eu suffisamment
 occasion dans les questions que nous avons
 résolues, d'expliquer les principaux arti-
 fices qu'on a imaginés jusqu'à présent dans
 cette partie de l'Analyse.

Fin des Elémens d'Algebre.

ADDITIONS.



ADDITIONS.



Tome II.

A a



AVERTISSEMENT.

LES Géomètres du siècle passé se sont beaucoup occupés de l'Analyse indéterminée, qu'on appelle vulgairement *Analyse de Diophante*; mais il n'y a proprement que Messieurs *Bachet* & *Fermat* qui aient ajouté quelque chose à ce que *Diophante* lui-même nous a laissé sur cette matière.

On doit sur-tout au premier une Méthode complete pour résoudre en nombres entiers tous les problèmes indéterminés du premier degré [a];

[a] Voyez plus bas le paragraphe III. Au reste je ne parle point ici de son Commentaire sur *Diophante*, parce que cet Ouvrage, excellent dans son genre, ne renferme à proprement parler aucune découverte.

A a ij

372 *AVERTISSEMENT.*

le second est l'Auteur de quelques Méthodes pour la résolution des équations indéterminées qui passent le second degré [b]; de la Méthode singulière, par laquelle on démontre qu'il est impossible que la somme ou la différence de deux carrés-carrés, puisse jamais être un carré [c]; de la solution d'un grand nombre de problèmes très-difficiles & de plusieurs beaux théorèmes sur les nombres entiers, qu'il a laissés sans démonstration, mais dont la plupart

[b] Ce sont celles qui sont exposées dans les chapitres 8, 9 & 10 du Traité précédent. Le P. Billi les a recueillies dans différens écrits de M. Fermat, & les a publiées à la tête de la nouvelle édition de *Diophante*, donnée par M. Fermat le fils.

[c] Cette méthode est détaillée dans le chapit. 13 du Traité précédent; on en trouve les principes dans la Remarque de M. Fermat, qui est après la Question xxvi du Livre vi de *Diophante*.

AVERTISSEMENT. 373

ont été ensuite démontrés par M. Euler dans les Commentaires de Pétersbourg [d].

Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siècle; & si on en excepte M. Euler, je ne connois personne qui s'y soit appliqué; mais les belles & nombreuses découvertes que ce grand Géometre y a faites, nous ont bien dédommagé de l'espece d'indifférence que les autres Géometres paroissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recher-

[d] Les problèmes & les théorèmes dont nous parlons; sont répandus dans les *Remarques* de M. Fermat sur les Questions de *Diophante*, & dans ses Lettres imprimées dans les *Opera Mathematica*, &c. & dans le second volume des *Œuvres de Wallis*.

On trouvera aussi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1770 & suiv. les démonstrations de quelques théorèmes de cet Auteur, qui n'avoient pas encore été démontrés.

ches. Les Commentaires de Pétersbourg sont pleins des travaux de Mr. Euler dans ce genre, & l'Ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux Amateurs de l'Analyse de *Diophante*. On n'avoit point encore d'Ouvrage où cette science fût traitée d'une manière méthodique, & qui renfermât & expliquât clairement les principales regles connues jusqu'ici pour la solution des problemes indéterminés. Le Traité précédent réunit ce double avantage; mais pour le rendre encore plus complet, j'ai cru devoir y faire plusieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots.

La théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmé-

tique, où elle sert à résoudre avec facilité des problemes qui, sans son secours, seroient presque intraitables; mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problemes indéterminés, lorsqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raison m'a engagé à exposer cette théorie avec toute l'étendue nécessaire pour la faire bien entendre; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique & d'Algebre; elle doit être peu connue des Géometres; je serai satisfait, si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familiere. A la suite de cette théorie qui occupe le §. I, viennent différens problemes curieux & entièrement nouveaux; qui dépen-

dent à la vérité de la même théorie; mais que j'ai cru devoir traiter d'une manière directe, pour en rendre la solution plus intéressante; on y remarquera principalement une méthode très-simple & très-facile pour réduire en fractions continues les racines des équations du second degré; & une démonstration rigoureuse que ces fractions doivent toujours être nécessairement périodiques.

Les autres Additions concernent sur-tout la résolution des équations indéterminées du premier & du second degré; je donne pour celles-ci des méthodes générales & nouvelles; tant pour le cas où l'on ne demande que des nombres rationnels, que pour celui où l'on exige que les nombres

cherchés soient entiers; & je traite d'ailleurs quelques autres matières importantes & relatives au même objet.

Enfin le dernier paragraphe renferme des recherches sur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de plusieurs fonctions semblables, est aussi une fonction semblable; j'y donne une méthode générale pour trouver ces sortes de fonctions; & j'en fais voir l'usage pour la résolution de différens problèmes indéterminés, sur lesquels les méthodes connues n'auroient aucune prise.

Tels sont les principaux objets de ces Additions, auxquelles j'aurois pu donner beaucoup plus d'étendue, si

je n'avois crain de passer de justes bornes ; je souhaite que les matieres que j'y ai traitées puissent mériter l'attention des Géometres , & réveiller leur goût pour une partie de l'Analyse, qui me paroît très-digne d'exercer leur sagacité.



ADDITIONS.



PARAGRAPHE PREMIER.

S U R

LES FRACTIONS CONTINUES.

I. COMME la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique & d'Algebre, & que par cette raison elle doit être peu connue des Géometres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette théorie, dont nous aurons souvent lieu de faire l'application dans la suite.

On appelle en général *fraction continue* toute expression de cette forme,

$$a + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \frac{d}{\delta} +, \text{ \&c.}$$

où les quantités $a, \beta, \gamma, \delta, \text{ \&c.}$ & $b, c, d, \text{ \&c.}$ sont des nombres entiers positifs ou négatifs; mais nous ne considérerons ici que les fractions continues, où les numérateurs $b, c, d, \text{ \&c.}$ sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$a + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} +, \text{ \&c.}$$

$a, \beta, \gamma, \text{ \&c.}$ étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs; car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui soient d'un grand usage dans l'Analyse, les autres n'étant presque que de pure curiosité.

2. Milord Brouncker est, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues; on connoît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit, à l'aire du cercle, & qui est

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} +, \text{ \&c.}$$

Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'*Arithmetica infinitorum* quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles Wallis démontre d'une manière assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de Brouncker avec la sienne, qui est, comme l'on sait, $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots}$; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste il ne paroît pas que l'un ou l'autre de ces deux grands Géomètres ait connu les principales propriétés & les avantages singuliers des fractions continues; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à Huyghens.

3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a , qui ne soit pas exprimable par un nombre entier; la voie la plus simple est de commencer par chercher

le nombre entier qui sera le plus proche de la valeur de a , & qui n'en diffèrera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre α , & l'on aura $a - \alpha$ égal à une fraction plus petite que l'unité; de sorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ fera au contraire un nombre plus grand que l'unité; soit donc $\frac{1}{a-\alpha} = b$, & comme b doit être un nombre plus grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de b ; & ce nombre étant nommé β , on aura de nouveau $b - \beta$ égal à une fraction plus petite que l'unité, & par conséquent $\frac{1}{b-\beta}$ sera égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra désigner par c ; ainsi, pour évaluer c , il n'y aura qu'à chercher pareillement le nombre entier le plus proche de c , lequel étant désigné par γ , on aura $c - \gamma$ égal à une quantité plus petite que l'unité, & par conséquent $\frac{1}{c-\gamma}$ sera égal à une quantité d plus grande que l'unité, & ainsi de suite. Par ce moyen il est clair qu'on doit épuiser

peu à peu la valeur de a , & cela de la manière la plus simple & la plus prompte qu'il est possible, puisqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il est possible, de la valeur cherchée.

Maintenant, puisque $\frac{1}{a-\alpha} = b$, on aura $a - \alpha = \frac{1}{b}$, & $a = \alpha + \frac{1}{b}$; de même, à cause de $\frac{1}{b-\beta} = c$, on aura $b = \beta + \frac{1}{c}$; &, à cause de $\frac{1}{c-\gamma} = d$, on aura pareillement $c = \gamma + \frac{1}{d}$, & ainsi de suite; de sorte qu'en substituant successivement ces valeurs, on aura

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \frac{1}{b}, \\ &= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{c}}, \\ &= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{d}}}, \end{aligned}$$

& en général

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}, \text{ \&c.}$$

Il est bon de remarquer ici que les nombres α , β , γ , &c. qui représentent, comme

nous venons de le voir, les valeurs entières approchées des quantités a, b, c , &c. peuvent être pris chacun de deux manières différentes, puisqu'on peut prendre également pour la valeur entière approchée d'une quantité donnée, l'un ou l'autre des deux nombres entiers, entre lesquels se trouve cette quantité; il y a cependant une différence essentielle entre ces deux manières de prendre les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en résulte; car si on prend toujours les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs β, γ, δ , &c. seront tous positifs; au lieu qu'ils seront tous négatifs, si on prend les valeurs approchées toutes plus grandes que les véritables, & ils seront en partie positifs & en partie négatifs, si les valeurs approchées sont prises tantôt trop petites & tantôt trop grandes.

En effet, si a est plus petit que a , $a - a$ sera une quantité positive; donc b sera positive, & β le sera aussi; au contraire $a - a$ sera négative, si a est plus grand que a , donc

donc b sera négative, & β le sera aussi. De même si β est plus petit que b , $b - \beta$ sera toujours une quantité positive; donc c le sera aussi, & par conséquent aussi γ ; mais si β est plus grand que b , $b - \beta$ sera une quantité négative; de sorte que c , & par conséquent aussi γ , seront négatifs, & ainsi de suite.

Au reste, lorsqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites celles qui, prises positivement, seroient plus grandes; nous aurons cependant quelquefois dans la suite occasion de comparer entr'elles des quantités purement par rapport à leur grandeur absolue; mais nous aurons soin d'avertir alors qu'il faudra faire abstraction des signes.

Je dois remarquer encore que si, parmi les quantités b, c, d , &c. il s'en trouve une qui soit égale à un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver cette quantité même; par exemple, si c est un nombre entier, la fraction continue qui donne la valeur de a , sera

Tome II.

B b

$$a = a + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}.$$

En effet, il est clair qu'il faudroit prendre $\gamma = c$, ce qui donneroit $d = \frac{1}{a-\gamma} = \frac{1}{0} = \infty$, & par conséquent $\delta = \infty$; de sorte que l'on auroit

$$a = a + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\infty}},$$

les termes suivans évanouissant vis-à-vis de la quantité infinie ∞ ; or $\frac{1}{\infty} = 0$; donc on aura simplement

$$a = a + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}.$$

Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a sera commensurable, c'est-à-dire qu'elle sera exprimée par une fraction rationnelle; mais lorsque a sera une quantité irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

4. Supposons que la quantité a soit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A & B étant des nombres entiers donnés; il est d'abord évident

que le nombre entier a qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, sera le quotient de la division de A par B ; ainsi supposant la division faite à la manière ordinaire, & nommant a le quotient & C le reste, on aura $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$; donc $b = \frac{B}{C}$; pour avoir de même la valeur entière approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il n'y aura qu'à diviser B par C , & prendre pour β le quotient de cette division; alors nommant D le reste, on aura $b - \beta = \frac{D}{C}$, & par conséquent $c = \frac{C}{D}$; on continuera donc à diviser C par D , & le quotient sera la valeur du nombre γ , & ainsi de suite; d'où résulte cette règle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Divisez d'abord le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, & nommez le quotient a ; divisez ensuite le dénominateur par le reste, & nommez le quotient β ; divisez après cela le premier reste par le second reste, & soit le quotient γ ; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste

par le dernier, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont tous des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue

$$a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}$$

qui sera égale à la fraction donnée.

5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{1103}{887}$; on divisera donc 1103 par 887, on aura le quotient 1 & le reste 216; on divisera 887 par 216, on aura le quotient 4 & le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 & le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 & le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 & le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 & le reste 1; enfin, divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 & le reste nul, de sorte que l'opération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, d'où l'on formera la fraction continue

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}$$

6. Comme dans la maniere ordinaire de faire les divisions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui est égal ou moindre que la fraction proposée, il s'ensuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues, dont tous les dénominateurs seront des nombres positifs.

Or on peut aussi prendre pour quotient le nombre entier, qui est immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorsque cette fraction n'est pas réductible à un nombre entier, & pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la maniere ordinaire; alors le reste sera négatif, & le quotient suivant sera nécessairement négatif. Ainsi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue positifs ou négatifs.

Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre 1 pour le quotient de $\frac{1103}{887}$ divisé

par 887, je puis prendre 2; mais j'aurai le reste négatif —671, par lequel il faudra maintenant diviser 887; on divisera donc 887 par —671, & l'on aura ou le quotient —1, & le reste 216, ou le quotient —2 & le reste —455. Prenons le quotient plus grand —1, & alors il faudra diviser le reste —671 par le reste 216, d'où l'on aura ou le quotient —3 & le reste —23, ou le quotient —4 & le reste 193. Je continue la division en adoptant le quotient plus grand —3; j'aurai à diviser le reste 216 par le reste —23, ce qui me donnera ou le quotient —9 & le reste 9, ou le quotient —10 & le reste —14, & ainsi de suite.

De cette manière on aura

$$\frac{1103}{887} = 2 + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-3} + \frac{1}{-9} +, \text{ \&c.}$$

où l'on voit que tous les dénominateurs sont négatifs.

7. On peut au reste rendre positif chaque dénominateur négatif; en changeant le

signe du numérateur; mais il faut alors changer aussi le signe du numérateur suivant; car il est clair qu'on a

$$\mu + \frac{1}{-v} + \frac{1}{\pi} +, \text{ \&c.} = \mu - \frac{1}{v} - \frac{1}{\pi} +, \text{ \&c.}$$

Ensuite on pourra, si l'on veut, faire disparaître tous les signes — de la fraction continue, & la réduire à une autre, où tous les termes soient positifs; car on a en général

$$\mu - \frac{1}{v} +, \text{ \&c.} = \mu - 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{v-1} +, \text{ \&c.}$$

comme on peut s'en convaincre aisément, en réduisant ces deux quantités en fractions ordinaires.

On pourroit aussi par un moyen semblable introduire des termes négatifs à la place des positifs, car on a

$$\mu + \frac{1}{v} +, \text{ \&c.} = \mu + 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{v-1} +, \text{ \&c.}$$

D'où l'on voit que par ces sortes de transformations on peut quelquefois simplifier une fraction continue, & la réduire à un moindre nombre de termes; ce qui aura

lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative.

En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour a , β , γ , &c. les nombres entiers qui approchent le plus des quantités a , b , c , &c. soit qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour a le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a , le nombre suivant β sera nécessairement égal à l'unité; en effet la différence entre a & a sera alors plus grande que $\frac{1}{2}$, par conséquent on aura $\beta = \frac{1}{a-a}$ plus petit que 2 ; donc β ne pourra être qu'égal à l'unité.

Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédens aussi approchans qu'il est possible,

&c que par conséquent la fraction peut se simplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, sans être obligé de refaire en entier le calcul.

8. La méthode de l'art. 4 peut servir aussi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou transcendante, pourvu qu'elle soit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, &c qu'en augmentant d'une unité le dernier caractère on a deux limites, entre lesquelles doit se trouver la vraie valeur de la quantité proposée, il faudra, pour ne pas sortir de ces limites, faire à la fois le même calcul sur les deux fractions dont il s'agit, &c n'admettre ensuite dans la fraction continue que les quotiens qui résulteront également des deux opérations.

Soit, par exemple, proposé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diamètre,

Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de Viète, $3,1415926535\dots$; de sorte qu'on aura la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$ à réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus; or si on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotiens 3, 7, 15, 1, &c. & si on prenoit la fraction plus grande $\frac{31415926535}{10000000000}$, on trouveroit les quotiens 3, 7, 16, &c. de sorte que le troisième quotient demeureroit incertain; d'où l'on voit que, pour, pouvoir pousser seulement la fraction continue au-delà de trois termes, il faudra nécessairement adopter une valeur de la périmétrie qui ait plus de six caractères.

Or si on prend la valeur donnée par Ludolph en trente-cinq caractères, & qui est 3, 14159, 26535, 89793, 23846, 26433, 83279, 50288; & qu'on opère en même temps sur cette fraction & sur la même, en y augmentant le dernier caractère 8 d'une unité, on trouvera cette suite de quotiens, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2,

1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned} \text{Périph.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} \\ \text{diamétr.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra simplifier la fraction, en y introduisant des termes négatifs, par les formules de l'art. 7, & l'on trouvera

$$\begin{aligned} \text{Périph.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{294} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} +, \&c. \\ \text{diamétr.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \frac{1}{294} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} +, \&c. \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \text{Périph.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{-294} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \&c. \\ \text{diamétr.} &= 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{-294} + \frac{1}{3} + \frac{1}{-3} + \&c. \end{aligned}$$

9. Nous avons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations, pour laquelle on n'avoit encore que des méthodes imparfaites & insuffi-

fantes. (Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1767 & 1768.) Toute la difficulté consiste à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entière la plus approchée, soit en excès ou en défaut de la racine cherchée, & c'est sur quoi nous avons donné les premiers des règles sûres & générales, par lesquelles on peut non-seulement reconnoître combien de racines réelles positives ou négatives, égales ou inégales, contient la proposée, mais encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines, & même les limites des quantités réelles qui composent les racines imaginaires. Supposant donc que x soit l'inconnue de l'équation proposée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, & nommant ce nombre a , il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. 3, $x = a + \frac{1}{y}$, (je nomme ici x, y, z , &c. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a, b, c , &c.) & substituant cette valeur à la place de x , on aura, après avoir fait évanouir les frac-

tions, une équation du même degré en y , qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entière approchée de cette racine, & nommant cette valeur β , on fera ensuite $y = \beta + \frac{1}{z}$, ce qui donnera de même une équation en z , qui aura aussi nécessairement une racine plus grande que l'unité, & dont on cherchera pareillement la valeur entière approchée z , & ainsi de suite. De cette manière la racine cherchée se trouvera exprimée par la fraction continue

$$a + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}$$

qui sera terminée si la racine est commensurable, mais qui ira nécessairement à l'infini, si elle est incommensurable.

On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes & les détails nécessaires pour se mettre au fait de cette méthode & de ses usages, & même différens moyens pour abréger souvent les opérations qu'elle de-

mande ; nous croyons n'y avoir presque rien laissé à désirer sur ce sujet si important.

Au reste, pour ce qui regarde les racines des équations du second degré, nous donnerons plus bas, (art. 33 & suiv.) une méthode particulière & très-simple pour les convertir en fractions continues.

10. Après avoir expliqué la génération des fractions continues, nous allons en montrer les usages & les principales propriétés.

Il est d'abord évident que plus on prend de termes dans une fraction continue, plus on doit approcher de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction ; de sorte que si on s'arrête successivement à chaque terme de la fraction, on aura une suite de quantités qui seront nécessairement convergentes vers la quantité proposée.

Ainsi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \dots}}}, \text{ \&c.}$$

on aura les quantités

$$\alpha, \alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \text{ \&c.}$$

ou bien, en réduisant,

$$\alpha, \frac{\alpha\beta + 1}{\beta}, \frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \beta}{\beta\gamma + 1}, \text{ \&c.}$$

qui approcheront de plus en plus de la valeur de a .

Pour pouvoir mieux juger de la loi & de la convergence de ces quantités, nous remarquerons que par les formules de l'article 3 on a

$$a = \alpha + \frac{1}{b}, b = \beta + \frac{1}{c}, c = \gamma + \frac{1}{d}, \text{ \&c.}$$

d'où l'on voit d'abord que a est la première valeur approchée de a ; qu'ensuite si on prend la valeur exacte de a , qui est $\frac{a\beta + 1}{\beta}$, & qu'on y substitue pour b sa valeur approchée β , on aura cette valeur plus approchée $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$; qu'on aura de même une troisième valeur plus approchée de a , en mettant d'abord pour b sa valeur exacte $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$, ce qui donne $a = \frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \beta}{\beta\gamma + 1}$, & prenant ensuite pour c la valeur approchée γ ; par

ce moyen la nouvelle valeur approchée de a sera

$$\frac{(a\beta + 1)\gamma + a}{\beta\gamma + 1}$$

continuant le même raisonnement, on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expression de a trouvée ci-dessus, à la place de c sa valeur exacte $\frac{\gamma d + 1}{d}$, ce qui donnera

$$a = \frac{((a\beta + 1)\gamma + a)d + a\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)d + \beta}$$

& prenant ensuite pour d sa valeur approchée δ ; de sorte qu'on aura pour la quatrième approximation la quantité

$$\frac{((a\beta + 1)\gamma + a)\delta + a\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)\delta + \beta}$$

& ainsi de suite.

De-là il est facile de voir que si par le moyen des nombres a, β, γ, δ , &c. on forme les expressions suivantes,

$$\begin{array}{ll} A = a & A' = 1 \\ B = \beta A + 1 & B' = \beta \\ C = \gamma B + A & C' = \gamma B' + A' \\ D = \delta C + B & D' = \delta C' + B' \\ E = \epsilon D + C & E' = \epsilon D' + C' \\ & \text{\&c.} \end{array}$$

on

on aura cette suite de fractions convergentes vers la quantité a ,

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}, \text{\&c.}$$

Si la quantité a est rationnelle, & se présente par une fraction quelconque $\frac{V}{P}$, il est évident que cette fraction sera toujours la dernière dans la série précédente; puisque dans ce cas la fraction continue sera terminée, & que la dernière fraction de la série ci-dessus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue.

Mais si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue allant nécessairement à l'infini, on pourra aussi pousser à l'infini la série des fractions convergentes.

11. Examinons maintenant la nature de ces fractions; & d'abord il est visible que les nombres A, B, C , &c. doivent aller en augmentant, aussi bien que les nombres A', B', C' , &c. car 1°. si les nombres a, β, γ , &c. sont tous positifs, les nombres

Tome II.

C c

$A, B, C, \&c. A', B', C', \&c.$ seront aussi tous positifs, & l'on aura évidemment $B > A, C > B, D > C, \&c.$ & $B' =$ ou $> A', C' > B', D' > C', \&c.$

2°. Si les nombres $a, b, \gamma, \&c.$ sont tous ou en partie négatifs, alors parmi les nombres $A, B, C, \&c.$ & $A', B', C',$ il y en aura de positifs & de négatifs; mais dans ce cas on considérera que l'on a en général par les formules précédentes

$$\frac{B}{A} = \beta + \frac{1}{a}, \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}, \&c.$$

d'où l'on voit d'abord que si les nombres $a, b, \gamma, \&c.$ sont différens de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes, on aura nécessairement, en faisant abstraction des signes, $\frac{B}{A}$ plus grand que l'unité; donc $\frac{A}{B}$ moindre que l'unité, par conséquent $\frac{C}{B}$ plus grand que l'unité, & ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que $B, \&c.$

Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres $a, b, \gamma, \&c.$ il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposons, par exemple,

que le nombre γ soit le premier qui soit égal à ± 1 ; on aura d'abord B plus grand que A , mais C sera moindre que B , s'il arrive que la fraction $\frac{A}{B}$ soit de signe différent de γ ; ce qui est clair par l'équation $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$; parce que dans ce cas $\gamma + \frac{A}{B}$ sera un nombre moindre que l'unité; or je dis qu'alors on aura nécessairement D plus grand que B ; car puisque $\gamma = \pm 1$, on aura, (art. 10), $e = \pm 1 + \frac{1}{a}$, & $e - \frac{1}{a} = \pm 1$; or comme c & d sont des quantités plus grandes que l'unité, (art. 3), il est clair que cette équation ne pourra subsister, à moins que c & d ne soient de même signe; donc, puisque γ & δ sont les valeurs entières approchées de c & d , ces nombres γ & δ devront être aussi de même signe; mais la fraction $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ doit être de même signe que γ , à cause que γ est un nombre entier, & $\frac{A}{B}$ une fraction moindre que l'unité; donc $\frac{C}{B}$ & δ seront des quantités de même signe; par conséquent $\frac{C}{B}$ sera une quantité positive. Or on a $\frac{D}{C}$

$= \delta + \frac{B}{C}$; donc multipliant par $\frac{C}{B}$, on aura $\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1$; donc $\frac{D}{B}$ étant une quantité positive, il est clair que $\frac{D}{B}$ sera plus grande que l'unité; donc D plus grand que B .

De-là on voit que s'il arrive que dans la série A, B, C , &c. il se trouve un terme qui soit moindre que le précédent, le terme suivant sera nécessairement plus grand; de sorte qu'en mettant à part ces termes plus petits, la série ne laissera pas d'aller en augmentant.

Au reste on pourra toujours éviter, si l'on veut, cet inconvénient, soit en prenant les nombres α, β, γ , &c. tous positifs, soit en les prenant tous différens de l'unité, ce qui est toujours possible.

On fera les mêmes raisonnemens par rapport à la série $A', B', C',$ &c. dans laquelle on a pareillement

$$\frac{B'}{A'} = \beta, \frac{C'}{B'} = \gamma + \frac{A'}{B'}, \frac{D'}{C'} = \delta + \frac{B'}{C'}, \text{ \&c.}$$

d'où l'on déduira des conclusions semblables aux précédentes.

12. Maintenant, si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. on trouvera $BA' - AB' = 1$, $CB' - BC' = AB' - BA'$, $DC' - CD' = BC' - CB'$, &c. d'où je conclus qu'on aura en général

$$BA' - AB' = 1$$

$$CB' - BC' = -1$$

$$DC' - CD' = 1$$

$$ED' - DE' = -1, \text{ \&c.}$$

Cette propriété est très-remarquable, & donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

D'abord on voit que les fractions $\frac{A}{A'},$

$\frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. doivent être déjà réduites à leurs moindres termes; car si, par exemple, C & C' avoient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier $CB' - BC'$ seroit aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut, à cause de $CB' - BC' = -1$.

Ensuite si on met les équations précédentes sous cette forme

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{C'B'}$$

$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{C'D'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = -\frac{1}{D'E'}, \text{ \&c.}$$

il est aisé de voir que les différences entre les fractions voisines de la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \text{ \&c.}$ vont continuellement en diminuant, de sorte que cette série est nécessairement convergente.

Or je dis que la différence entre deux fractions consécutives est aussi petite qu'il est possible; en sorte qu'entre ces mêmes fractions il ne sauroit tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là,

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{C}{C'}$ & $\frac{D}{D'}$, dont la différence est

$\frac{1}{C'D'}$, & supposons, s'il est possible, qu'il existe une autre fraction $\frac{m}{n}$, dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, & dans laquelle le dénominateur n soit moindre que C' ou que D' ; donc puisque $\frac{m}{n}$ doit se trouver entre $\frac{C}{C'}$ & $\frac{D}{D'}$, il faudra

que la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{C}{C'}$, qui est $\frac{mC' - nC}{nC'}$ ou $\frac{nC - mC'}{nC'}$, soit plus petite

que $\frac{1}{C'D'}$, différence entre $\frac{D}{D'}$ & $\frac{C}{C'}$; mais il est clair que celle-là ne sauroit être moindre que $\frac{1}{nC'}$; donc, si $n < D'$, elle

sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C'D'}$;

de même la différence entre $\frac{m}{n}$ & $\frac{D}{D'}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{nD'}$, sera

nécessairement plus grande que $\frac{1}{C'D'}$, si $n < C$, au lieu qu'elle devrait en être plus petite.

13. Voyons présentement de combien chaque fraction de la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \&c.$ approchera de la valeur de la quantité a . Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10. donnent

$$a = \frac{Ab + 1}{A'b}$$

$$a = \frac{Bc + A}{B'c + A'}$$

$$a = \frac{Cd + B}{C'd + B'}$$

$$a = \frac{De + C}{D'e + C'}$$

& ainsi de suite.

Donc si on veut savoir de combien la fraction $\frac{C}{C'}$, par exemple, approche de la quantité, on cherchera la différence entre $\frac{C}{C'}$ & a ; en prenant pour a la quantité

$$\frac{Cd + B}{C'd + B'}, \text{ on aura } a - \frac{C}{C'} = \frac{Cd + B}{C'd + B'} - \frac{C}{C'}$$

$= \frac{BC' - CB'}{C'(C'd + B')} = \frac{1}{C'(C'd + B')}$, à cause de $BC' - CB' = 1$, (art. 12); or comme on suppose que d soit la valeur approchée de d , en sorte que la différence entre d & d' soit moindre que l'unité, (art. 3), il est clair que la valeur de d sera renfermée entre les deux nombres d & $d + 1$, (le signe supérieur étant pour le cas où la valeur approchée d est moindre que la véritable d , & le signe inférieur pour le cas où d est plus grand que d), & que par conséquent la valeur de $C'd + B'$, fera aussi renfermée entre ces deux-ci, $C'd + B'$ & $C'(d + 1) + B'$, c'est-à-dire entre D' & $D' + C'$; donc la différence $a - \frac{C}{C'}$ fera

renfermée entre ces deux limites $\frac{1}{C'D'}$,

$\frac{1}{C'(D' + C')}$; d'où l'on pourra juger de la quantité de l'approximation de la fraction $\frac{C}{C'}$.

14. En général on aura

$$a = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}$$

$$a = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'c + A')}$$

$$a = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'(C'd + B')}$$

$$a = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'e + C')}$$

& ainsi de suite.

Or si on suppose que les valeurs approchées a , β , γ , &c. soient toujours prises moindres que les véritables, ces nombres seront tous positifs, aussi bien que les quantités b , c , d , &c. (art. 3); donc les nombres A' , B' , C' , &c. seront aussi tous positifs; d'où il s'ensuit que les différences entre la quantité a & les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$,

$\frac{C}{C'}$, &c. seront alternativement positives & négatives; c'est-à-dire que ces fractions seront alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a .

De plus, comme $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$; &c. (hyp.) on aura $b > B'$, $B'c + A' > B'\gamma + A' > C'$, $C'd + B' > C'\delta + B' > D'$, &c. & comme $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, on aura $b < B' + 1$, $B'c + A' < B'(\gamma + 1) + A' < C' + B'$, $C'd + B' < C'(\delta + 1) + B' < D' + C'$, &c. de sorte que les erreurs qu'on commettrait en prenant les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. pour la valeur de a , seroient respectivement moindres que $\frac{1}{A'B'}$, $\frac{1}{B'C'}$, $\frac{1}{C'D'}$, &c. mais

plus grandes que $\frac{1}{A'(B' + A')}$, $\frac{1}{B'(C' + B')}$, $\frac{1}{C'(D' + C')}$, &c. d'où l'on voit combien ces erreurs sont petites, & combien elles vont en diminuant d'une fraction à l'autre.

Mais il y a plus: puisque les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. sont alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a ; il est clair que la valeur de cette quantité

se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; or nous avons vu ci-dessus, (art. 12), qu'il est impossible qu'entre deux telles fractions puisse se trouver une autre fraction quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un de ceux de ces deux fractions; d'où l'on peut conclure que chacune des fractions dont il s'agit, exprime la quantité a plus exactement que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque, dont le dénominateur seroit plus petit que celui de la fraction suivante; c'est-à-dire que la fraction $\frac{C}{C'}$, par exemple, exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre fraction $\frac{n}{D}$, dans laquelle n seroit moindre que D .

15. Si les valeurs approchées a, β, γ , &c. sont toutes ou en partie plus grandes que les véritables, alors parmi ces nombres il y en aura nécessairement de négatifs, (art. 3), ce qui rendra aussi négatifs quelques-uns des termes des séries A, B, C ; &c. A', B', C' , &c. par conséquent les

différences entre les fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. & la quantité a , ne seront plus alternativement positives & négatives, comme dans le cas de l'article précédent; de sorte que ces fractions n'auront plus l'avantage de donner toujours des limites en plus & en moins de la quantité a , avantage qui me paroît d'une très-grande importance, & qui doit par conséquent faire préférer toujours dans la pratique les fractions continues où les dénominateurs seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la suite que des fractions de cette espèce.

16. Considérons donc la série $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}$, &c. dans laquelle les fractions sont alternativement plus petites & plus grandes que la quantité a , & il est clair qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci:

$$\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}, \text{ &c.}$$

$$\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}, \text{ &c.}$$

donc la premiere sera composée de fractions toutes plus petites que a , & qui iront en augmentant vers la quantité a ; donc la seconde sera composée de fractions toutes plus grandes que a , mais qui iront en diminuant vers cette même quantité. Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier: dans la premiere on aura, (art. 10 & 12),

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{\gamma}{A'C'} \\ \frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{\delta}{C'E'}, \text{ \&c.}$$

& dans la seconde on aura

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{\delta}{B'D'} \\ \frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{\zeta}{D'F'}, \text{ \&c.}$$

Or si les nombres γ , δ , ϵ , &c. étoient tous égaux à l'unité, on pourroit prouver, comme dans l'art. 12, qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des séries précédentes, il ne pourroit jamais se trouver aucune autre fraction

dont le dénominateur seroit moindre que ceux de ces deux fractions; mais il n'en sera pas de même, lorsque les nombres γ , δ , ϵ , &c. seront différens de l'unité; car dans ce cas on pourra insérer entre les fractions dont il s'agit autant de fractions *intermédiaires* qu'il y aura d'unités dans les nombres $\gamma-1$, $\delta-1$, $\epsilon-1$, &c. & pour cela il n'y aura qu'à mettre successivement dans les valeurs de C & C' , (art. 10), les nombres 1, 2, 3, &c. γ à la place de γ ; & de même dans les valeurs de D & D' , les nombres 1, 2, 3, &c. δ à la place de δ , & ainsi de suite.

17. Supposons, par exemple, que γ soit $=4$, on aura $C=4B+A$ & $C'=4B'+A'$, & on pourra insérer entre les fractions $\frac{A}{A'}$ & $\frac{C}{C'}$ trois fractions *intermédiaires*,

$$\text{qui seront } \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \\ \frac{3B+A}{3B'+A'}.$$

Or il est clair que les dénominateurs de

ces fractions forment une suite croissante arithmétique depuis A' jusqu'à C' ; & nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, en sorte qu'il seroit maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}, \frac{4B+A}{4B'+A'},$$

ou $\frac{C}{C'}$, aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, & dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car si on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA' - AB' = 1$,

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')C'};$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions

A'

$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}$, &c. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, on pourra prouver par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. 12, qu'il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{a}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou en général s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs.

De plus, comme les fractions dont nous parlons sont toutes plus grandes que la vraie valeur de a , & que la fraction $\frac{B}{B'}$ en est plus petite, il est évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a , en sorte que la différence en sera plus petite que celle de la même fraction & de la fraction $\frac{B}{B'}$; or on trouve

Tome II.

DD

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{1}{C'B'}$$

Donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité, divisée par le produit des dénominateurs, on y pourra appliquer le même raisonnement de l'article 12, pour prouver qu'aucune fraction $\frac{a}{n}$ ne sauroit tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'},$ &c. & la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur n est plus petit

que celui de la même fraction; d'où il suit que chacune de ces fractions approche plus de la quantité a que ne pourroit faire toute autre fraction plus petite que a , & qui auroit

un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui seroit conçue en termes plus simples.

18. Nous n'avons considéré dans l'article précédent que les fractions *intermédiaires* entre $\frac{A}{A'}$ & $\frac{C}{C'}$, il en sera de même des fractions *intermédiaires* entre $\frac{C}{C'}$ & $\frac{E}{E'}$,

entre $\frac{E}{E'}$ & $\frac{G}{G'}$, &c. si $a, n,$ &c. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'},$ &c. tout ce que nous venons de dire relativement à la première série $\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'},$ &c. de sorte que si les nombres $a, \zeta,$ &c. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre les fractions $\frac{B}{B'}$ & $\frac{D}{D'}$,

entre $\frac{D}{D'}$ & $\frac{F}{F'}$, &c. différentes fractions *intermédiaires* toutes plus grandes que a , mais qui iront continuellement en diminuant, & qui seront telles qu'elles expri-

meront la quantité a plus exactement que ne pourroit faire aucune autre fraction plus grande que a , & qui seroit conçue en termes plus simples.

De plus, si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{\beta}$, les fractions

$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \&c.$ jusqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}$, favoir $\frac{B}{\beta}$, & ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions intermédiaires.

De cette maniere on aura donc ces deux suites complètes de fractions convergentes vers la quantité a .

Fractions croissantes & plus petites que a .

$\frac{A}{A}, \frac{B+A}{B+A}, \frac{2B+A}{2B+A}, \frac{3B+A}{3B+A}, \&c.$
 $\frac{2B+A}{2B+A}, \frac{C}{C}, \frac{D+C}{D+C}, \frac{2D+C}{2D+C}, \frac{3D+C}{3D+C}, \&c.$
 $\frac{D+C}{D+C}, \frac{E}{E}, \frac{F+E}{F+E}, \&c. \&c. \&c.$

Fractions décroissantes & plus grandes que a .

$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}, \&c.$
 $\frac{\beta A+1}{\beta}, \frac{B}{B}, \frac{C+B}{C+B}, \frac{2C+B}{2C+B}, \&c.$
 $\frac{3C+B}{3C+B}, \frac{D}{D}, \frac{E+D}{E+D}, \&c. \&c. \&c.$

Si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions $\frac{A}{A}, \frac{B}{B}, \frac{C}{C}, \&c.$ que nous nommerons dans la suite fractions *principales*, pour les distinguer des fractions *intermédiaires*, va d'elle-même à l'infini (art. 10).

Mais si la quantité a est rationnelle & égale à une fraction quelconque $\frac{V}{N}$, nous avons vu dans l'article cité, que la série dont il s'agit sera terminée, & que la dernière fraction de cette série sera la fraction même $\frac{V}{N}$, donc cette fraction terminera

aussi nécessairement une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions principales, & la série des fractions plus grandes que a sera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus petites que a , se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$, qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur δ , qui devoit suivre le dernier dénominateur δ sera $=\infty$, (art. 3); de sorte que la fraction $\frac{E}{E'}$, qui suivroit $\frac{D}{D'}$ dans la suite des fractions principales, seroit $\frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'}$; or par la loi des fractions intermédiaires, il est clair

qu'à cause de $=\infty$, on pourra inférer entre les fractions $\frac{C}{C'}$ & $\frac{E}{E'}$ une infinité de fractions intermédiaires, qui seront $\frac{D+C}{D'+C'}$, $\frac{2D+C}{2D'+C'}$, $\frac{3D+C}{3D'+C'}$, &c.

Ainsi dans ce cas on pourra, après la fraction $\frac{C}{C'}$ dans la première suite de fractions, placer encore les fractions intermédiaires dont nous parlons, & les continuer à l'infini.

PROBLEME.

19. Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.

Ce problème se résoudra facilement par la théorie que nous venons d'expliquer.

On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la méthode de l'art. 4, en ayant soin de prendre

toutes les valeurs approchées plus petites que les véritables, pour que les nombres β, γ, δ , &c. soient tous positifs; ensuite, à l'aide des nombres trouvés a, β, γ , &c. on formera, d'après les formules de l'art.

10, les fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. dont la dernière sera nécessairement la même que la fraction proposée, parce que dans ce cas la fraction continue est terminée. Ces fractions seront alternativement plus petites & plus grandes que la fraction donnée, & seront successivement conçues en termes plus grands; & de plus elles seront telles que chacune de ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque qui seroit conçue en termes moins simples. Ainsi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes que la proposée, qui pourront satisfaire au problème.

Qué si on veut considérer en particulier les fractions plus petites & les fractions plus grandes que la proposée, on inférera entre

les fractions précédentes autant de fractions *intermédiaires* que l'on pourra, & on en formera deux suites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites & les autres toutes plus grandes que la fraction donnée, (art. 16, 17 & 18); chacune de ces suites aura en particulier les mêmes propriétés que la suite des fractions principales $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, &c. car les fractions dans chaque suite seront successivement conçues en plus grands termes, & chacune d'elles approchera plus de la fraction proposée, que ne pourroit faire aucune autre fraction qui seroit pareillement plus petite ou plus grande que la proposée, mais qui seroit conçue en termes plus simples.

Au reste il peut arriver qu'une des fractions *intermédiaires* d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée, qu'une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c'est pourquoi il ne convient d'employer les fractions *intermédiaires*, que lorsqu'on

veut que les fractions cherchées soient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée.

E X E M P L E I.

20. Suivant M. de la Caille, l'année solaire est de $365^h 5^h 48' 49''$, & par conséquent plus longue de $5^h 48' 49''$ que l'année commune de 365^h ; si cette différence étoit exactement de 6 heures, elle donneroit un jour au bout de quatre années communes; mais si on veut savoir au juste au bout de combien d'années communes cette différence peut produire un certain nombre de jours, il faut chercher le rapport qu'il y a entre 24^h & $5^h 48' 49''$, & on trouve ce rapport $= \frac{86400}{20929}$; de sorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années communes, il faudroit intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques.

Or comme le rapport de 86400 à 20929 est exprimé en termes fort grands, on propose de trouver en de termes plus petits des rapports aussi approchés de celui-ci qu'il est possible.

On réduira donc la fraction $\frac{86400}{20929}$ en fraction continue par la règle donnée dans l'art. 4, qui est la même que celle qui sert à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés: on aura

$$\begin{array}{r}
 20929 \overline{) 86400} 4 = a \\
 \underline{83716} \\
 2684 \quad 20929 \overline{) 7} = b \\
 \underline{16788} \\
 2141 \quad 2684 \overline{) 1} = c \\
 \underline{2141} \\
 543 \quad 2141 \overline{) 3} = d \\
 \underline{1629} \\
 512 \quad 543 \overline{) 1} = e \\
 \underline{512} \\
 31 \quad 512 \overline{) 16} = f \\
 \underline{496} \\
 16 \quad 16 \overline{) 1} = g \\
 \underline{16} \\
 15 \quad 16 \overline{) 1} = h \\
 \underline{15} \\
 1 \quad 15 \overline{) 15} = i \\
 \underline{15} \\
 0.
 \end{array}$$

Connoissant ainsi tous les quotiens $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, on en formera aisément la série

$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \&c.$ de la manière suivante:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15, & & & & \\
 \frac{4}{13}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{128}{31}, & \frac{161}{39}, & \frac{2704}{655}, & \frac{2863}{694}, & \frac{3569}{1349}, & \frac{86400}{20929}, & & &
 \end{array}$$

où l'on voit que la dernière fraction est la même que la proposée.

Pour faciliter la formation de ces fractions, on écrira d'abord, comme je viens de le faire, la suite des quotiens 4, 7, 1, &c. & on placera au-dessous de ces coefficients les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{31}{8}$, &c. qui en résultent.

La première fraction aura toujours pour numérateur le nombre qui est au-dessus, & pour dénominateur l'unité.

La seconde aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la première, plus l'unité, & pour dénominateur le nombre même qui est au-dessus.

La troisième aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la seconde, plus celui de la première; & de même pour dénominateur, le produit du nombre qui est au-dessus par le dénominateur de la seconde, plus celui de la première.

Et en général chaque fraction aura pour

numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente; & pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente.

Ainsi $29 = 7 \cdot 4 + 1$, $7 = 1 \cdot 1$, $33 = 1 \cdot 29 + 4$, $8 = 1 \cdot 7 + 1$, $128 = 3 \cdot 33 + 29$, $31 = 3 \cdot 8 + 7$, &c. ainsi de suite; ce qui s'accorde avec les formules de l'art. 10.

Maintenant on voit par les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{31}{8}$, &c. que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du calendrier Julien; mais qu'on approcheroit plus de l'exactitude en n'intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, &c. ainsi de suite.

On voit de plus que comme les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{31}{8}$ sont alternativement plus petites & plus grandes que la fraction $\frac{86400}{20739}$ ou

$5^{\frac{24^h}{387 \frac{49}{11}}}$, l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop foible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, & ainsi de suite; mais chacune de ces intercalations fera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps.

Or, si on range dans deux séries particulières les fractions plus petites & les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries; & pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure tous les nombres entiers moindres que ce nombre, (lorsqu'il y en a).

Ainsi, considérant d'abord les fractions croissantes

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1, & 1, & 15. \\ 4, & 33, & 161, & 2865, & 86400 \\ 1, & 8, & 39, & 694, & 20929 \end{array}$$

on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus

de la seconde, de la troisième & de la quatrième, on ne pourra placer aucune fraction *intermédiaire*, ni entre la première & la seconde, ni entre la seconde & la troisième, ni entre la troisième & la quatrième; mais comme la dernière fraction a au-dessus d'elle le nombre 15, on pourra entre cette fraction & la précédente, placer quatorze fractions *intermédiaires*, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $2865 + 5569, 2865 + 2.5569, 2865 + 3.5569$ &c. & dont les dénominateurs formeront aussi la progression arithmétique $694 + 1349, 694 + 2.1349, 694 + 3.1349$, &c.

Par ce moyen la suite complète des fractions croissantes sera

$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 33, & 161, & 2865, & 86400, & 19572, & 25141 \\ 1, & 8, & 39, & 694, & 2043, & 3392, & 4741, & 6090, \\ 10910, & 36279, & 41848, & 47417, & 52986, & 58555, & 64124, \\ 7439, & 8788, & 10137, & 11486, & 12835, & 14184, & 15533, \\ 65693, & 75162, & 80831, & 86400, & & & \\ 16882, & 18331, & 19586, & 20929, & & & \end{array}$$

Et comme la dernière fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin.

De-là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pechent par excès, les plus simples & les plus exactes seront celles d'un jour sur quatre années, ou de huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur cent soixante-un ans, & ainsi de suite.

Considérons maintenant les fractions décroissantes

$$\begin{array}{ccccccc} 7, & 3, & 16, & 1. \\ \frac{29}{7}, & \frac{128}{31}, & \frac{2704}{655}, & \frac{5569}{1349}, \end{array}$$

& d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la premiere fraction, on pourra en placer six autres avant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $4+1, 2.4+1, 3.4+1$, &c. & dont les dénominateurs formeront la progression $1, 2, 3$, &c. de même, à cause du nombre 7, on pourra placer entre la premiere & la seconde fraction deux fractions *intermédiaires*; & entre la seconde & la troisieme on en pourra placer 15, à cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisieme;

troisieme; mais entre celle-ci & la dernière on n'en pourra insérer aucune, à cause que le nombre qui y est au-dessus est l'unité.

De plus, il faut remarquer que comme la série précédente n'est pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer aussi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 18. Ainsi on aura cette série de fractions croissantes

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{1}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{13}{3}, & \frac{17}{4}, & \frac{21}{5}, & \frac{25}{6}, & \frac{29}{7}, & \frac{62}{15}, & \frac{95}{23}, & \frac{128}{31}, \\ \frac{289}{70}, & \frac{450}{109}, & \frac{611}{148}, & \frac{772}{187}, & \frac{933}{226}, & \frac{1094}{265}, & \frac{1255}{304}, & \frac{1416}{343}, \\ \frac{1577}{382}, & \frac{1738}{421}, & \frac{1899}{460}, & \frac{2060}{499}, & \frac{2221}{538}, & \frac{2382}{577}, & \frac{2543}{616}, \\ \frac{2704}{655}, & \frac{2865}{694}, & \frac{3026}{733}, & \frac{3187}{772}, & \frac{3348}{811}, & \frac{3509}{850}, \\ \frac{3670}{889}, & \frac{3831}{928}, & \frac{3992}{967}, & \frac{4153}{1006}, & \frac{4314}{1045}, & \frac{4475}{1084}, \end{array}$$

lesquelles sont toutes plus petites que la fraction proposée, & en approchent plus que toutes autres fractions qui seroient conçues en termes moins simples.

On peut conclure de-là, que si on ne vouloit avoir égard qu'aux intercalations qui pécheroient par défaut, les plus simples & les plus exactes seroient celles d'un

jour sur cinq ans, ou de deux jours sur neuf ans, ou de trois jours sur treize ans, &c.

Dans le calendrier grégorien on intercale seulement quatre-vingt dix-sept jours dans quatre cents années; on voit par la table précédente qu'on approcheroit beaucoup plus de l'exactitude, en intercalant cent neuf jours en quatre cents cinquante années.

Mais il faut remarquer que dans la réformation grégorienne on s'est servi de la détermination de l'année donnée par Copernic, laquelle est de $365^{\circ} 5^h 49' 20''$. En employant cet élément on auroit, au lieu de la fraction $\frac{86400}{20925}$, celle-ci $\frac{86400}{20950}$, ou bien $\frac{140}{131}$; d'où l'on trouveroit par la méthode précédente les quotiens 4, 8, 5, 3, & de-là ces fractions principales

$$\begin{array}{r} 4, 8, 5, 3, \\ \frac{4}{1}, \frac{33}{8}, \frac{169}{41}, \frac{540}{131} \end{array}$$

qui sont, à l'exception des deux premières, assez différentes de celles que nous avons trouvées ci-dessus. Cependant on ne trouve pas parmi ces fractions la fraction $\frac{400}{97}$ adop-

tée dans le calendrier grégorien; & cette fraction ne peut pas même le trouver parmi les fractions *intermédiaires* qu'on pourroit insérer dans les deux séries $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$, & $\frac{13}{8}$, $\frac{140}{131}$; car il est clair qu'elle ne pourroit tomber qu'entre ces deux dernières fractions, entre lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{140}{131}$, il peut tomber deux fractions *intermédiaires*, qui seront $\frac{202}{49}$ & $\frac{371}{90}$; d'où l'on voit qu'on auroit approché plus de l'exactitude, si dans la réformation grégorienne on avoit prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de trois cents soixante & onze ans.

Si on réduit la fraction $\frac{400}{97}$ à avoir pour numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{86400}{20913}$, ce qui supposeroit l'année tropique de $365^{\circ} 5^h 49' 12''$.

Dans ce cas l'interpolation grégorienne seroit tout-à-fait exacte; mais comme les observations donnent l'année plus courte de plus de $20''$, il est clair qu'il faudra nécessairement, au bout d'un certain espace

E e ij

436 ADDITIONS.

de temps, introduire une nouvelle intercalation.

Si on vouloit s'en tenir à la détermination de M. de la Caille, comme le dénominateur 97 de la fraction $\frac{400}{97}$ se trouve entre les dénominateurs de la cinquième & de la sixième des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit de ce que nous avons démontré, (art. 14), que la fraction $\frac{161}{39}$ approcheroit plus de la vérité que la fraction $\frac{400}{97}$; au reste, comme les Astronomes sont encore partagés sur la véritable longueur de l'année, nous nous abstenons de prononcer sur ce sujet; aussi n'avons-nous eu d'autre objet dans les détails que nous venons de donner, que de faciliter les moyens de se mettre au fait des fractions continues & de leurs usages; dans cette vue nous ajouterons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE II.

21. Nous avons déjà donné, (art. 8), la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence du cercle au diamètre,

ADDITIONS. 437

en tant qu'elle résulte de la fraction de Ludolph; ainsi il n'y aura qu'à calculer, de la manière enseignée dans l'exemple précédent, la série des fractions convergentes vers ce même rapport, laquelle sera

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \\ \frac{2}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{315}{119}, \frac{101993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208141}{66317}, \frac{312689}{99132},$$

$$2, 1, 3, 1, 14, \\ \frac{833719}{263381}, \frac{1146408}{364913}, \frac{4271943}{1360120}, \frac{5419358}{1725033}, \frac{80143857}{23540582},$$

$$2, 1, 1, 2, \\ \frac{161707065}{52746197}, \frac{241810922}{78256779}, \frac{411157987}{131002976}, \frac{1068966896}{340263731},$$

$$2, 2, 2, 1, \\ \frac{2149491779}{811528458}, \frac{6167910454}{1963319607}, \frac{14885392687}{4738167652}, \frac{21015341141}{67014872359},$$

$$84, 2, 1, \\ \frac{1783166216151}{167663097408}, \frac{3187781776203}{1142027682075}, \frac{3371151992734}{1705690779483},$$

$$1, 15, 3, \\ \frac{8958937768937}{2851718461558}, \frac{139755218526789}{44485467702855}, \frac{418224593349304}{136308121370117},$$

$$13, 1, 4, \\ \frac{3706674932067741}{1816491048113774}, \frac{61348991254517045}{19127991695684491}, \frac{50246273033731921}{9627687726812335},$$

E e iij

2,	6,
6661746519288887	430010946591069243
21108174623389167	13687673347187340
6,	1.
264669711119930435	3076704071730373158
841408587426513207	97934132893700547

Ces fractions seront donc alternative-
ment plus petites & plus grandes que la
vraie raison de la circonférence au dia-
mètre, c'est-à-dire que la première $\frac{2}{1}$ sera
plus petite, la seconde $\frac{22}{7}$ plus grande, &
ainsi de suite; & chacune d'elles appro-
chera plus de la vérité que ne pourroit faire
toute autre fraction qui seroit exprimée en
termes plus simples, ou, en général, qui
auroit un dénominateur moindre que le dé-
nominateur de la fraction suivante; de sorte
que l'on peut assurer que la fraction $\frac{2}{1}$ ap-
proche plus de la vérité que ne peut faire
aucune autre fraction dont le dénominateur
seroit moindre que 7; de même la fraction
 $\frac{22}{7}$ approchera plus de la vérité que toute
autre fraction dont le dénominateur seroit
moindre que 106, & ainsi des autres.

Quant à l'erreur de chaque fraction, elle
sera toujours moindre que l'unité divisée
par le produit du dénominateur de cette
fraction par celui de la fraction suivante.
Ainsi l'erreur de la fraction $\frac{2}{1}$ sera moindre
que $\frac{1}{7}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ sera moindre
que $\frac{1}{7 \cdot 106}$, & ainsi de suite. Mais en même
temps l'erreur de chaque fraction sera plus
grande que l'unité divisée par le produit du
dénominateur de cette fraction, par la som-
me de ce dénominateur, & du dénomina-
teur de la fraction suivante; de sorte que
l'erreur de la fraction $\frac{2}{1}$ sera plus grande que
 $\frac{1}{8}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ plus grande que
 $\frac{1}{7 \cdot 113}$, & ainsi de suite, (art. 14).

Si on vouloit maintenant séparer les frac-
tions plus petites que le rapport de la circon-
férence au diamètre, d'avec les plus gran-
des, on pourroit, en insérant les fractions
intermédiaires convenables, former deux
suites de fractions, les unes croissantes &
les autres décroissantes vers le vrai rapport

dont il s'agit ; on auroit de cette maniere

Fractions plus petites que $\frac{\text{périph.}}{\text{diam.}}$.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} > \frac{31}{8} > \frac{47}{15} > \frac{69}{25} > \frac{91}{36} > \frac{113}{45} > \frac{135}{50} > \frac{157}{57} > \frac{179}{64} > \frac{201}{71} > \frac{223}{78} \\ \frac{245}{85} > \frac{267}{92} > \frac{289}{99} > \frac{311}{106} > \frac{333}{113} > \frac{355}{120} > \frac{377}{127} > \frac{399}{134} > \frac{421}{141} > \frac{443}{148} > \frac{465}{155} \\ \frac{487}{162} > \frac{509}{169} > \frac{531}{176} > \frac{553}{183} > \frac{575}{190} > \frac{597}{197} > \frac{619}{204} > \frac{641}{211} > \frac{663}{218} > \frac{685}{225} > \frac{707}{232} > \frac{729}{239} > \frac{751}{246} > \frac{773}{253} > \frac{795}{260} > \frac{817}{267} > \frac{839}{274} > \frac{861}{281} > \frac{883}{288} > \frac{905}{295} > \frac{927}{302} > \frac{949}{309} > \frac{971}{316} > \frac{993}{323} > \frac{1015}{330} > \frac{1037}{337} > \frac{1059}{344} > \frac{1081}{351} > \frac{1103}{358} > \frac{1125}{365} > \frac{1147}{372} > \frac{1169}{379} > \frac{1191}{386} > \frac{1213}{393} > \frac{1235}{400} > \frac{1257}{407} > \frac{1279}{414} > \frac{1301}{421} > \frac{1323}{428} > \frac{1345}{435} > \frac{1367}{442} > \frac{1389}{449} > \frac{1411}{456} > \frac{1433}{463} > \frac{1455}{470} > \frac{1477}{477} > \frac{1499}{484} > \frac{1521}{491} > \frac{1543}{498} > \frac{1565}{505} > \frac{1587}{512} > \frac{1609}{519} > \frac{1631}{526} > \frac{1653}{533} > \frac{1675}{540} > \frac{1697}{547} > \frac{1719}{554} > \frac{1741}{561} > \frac{1763}{568} > \frac{1785}{575} > \frac{1807}{582} > \frac{1829}{589} > \frac{1851}{596} > \frac{1873}{603} > \frac{1895}{610} > \frac{1917}{617} > \frac{1939}{624} > \frac{1961}{631} > \frac{1983}{638} > \frac{2005}{645} > \frac{2027}{652} > \frac{2049}{659} > \frac{2071}{666} > \frac{2093}{673} > \frac{2115}{680} > \frac{2137}{687} > \frac{2159}{694} > \frac{2181}{701} > \frac{2203}{708} > \frac{2225}{715} > \frac{2247}{722} > \frac{2269}{729} > \frac{2291}{736} > \frac{2313}{743} > \frac{2335}{750} > \frac{2357}{757} > \frac{2379}{764} > \frac{2401}{771} > \frac{2423}{778} > \frac{2445}{785} > \frac{2467}{792} > \frac{2489}{799} > \frac{2511}{806} > \frac{2533}{813} > \frac{2555}{820} > \frac{2577}{827} > \frac{2599}{834} > \frac{2621}{841} > \frac{2643}{848} > \frac{2665}{855} > \frac{2687}{862} > \frac{2709}{869} > \frac{2731}{876} > \frac{2753}{883} > \frac{2775}{890} > \frac{2797}{897} > \frac{2819}{904} > \frac{2841}{911} > \frac{2863}{918} > \frac{2885}{925} > \frac{2907}{932} > \frac{2929}{939} > \frac{2951}{946} > \frac{2973}{953} > \frac{2995}{960} > \frac{3017}{967} > \frac{3039}{974} > \frac{3061}{981} > \frac{3083}{988} > \frac{3105}{995} > \frac{3127}{1002} > \frac{3149}{1009} > \frac{3171}{1016} > \frac{3193}{1023} > \frac{3215}{1030} > \frac{3237}{1037} > \frac{3259}{1044} > \frac{3281}{1051} > \frac{3303}{1058} > \frac{3325}{1065} > \frac{3347}{1072} > \frac{3369}{1079} > \frac{3391}{1086} > \frac{3413}{1093} > \frac{3435}{1100} > \frac{3457}{1107} > \frac{3479}{1114} > \frac{3501}{1121} > \frac{3523}{1128} > \frac{3545}{1135} > \frac{3567}{1142} > \frac{3589}{1149} > \frac{3611}{1156} > \frac{3633}{1163} > \frac{3655}{1170} > \frac{3677}{1177} > \frac{3699}{1184} > \frac{3721}{1191} > \frac{3743}{1198} > \frac{3765}{1205} > \frac{3787}{1212} > \frac{3809}{1219} > \frac{3831}{1226} > \frac{3853}{1233} > \frac{3875}{1240} > \frac{3897}{1247} > \frac{3919}{1254} > \frac{3941}{1261} > \frac{3963}{1268} > \frac{3985}{1275} > \frac{4007}{1282} > \frac{4029}{1289} > \frac{4051}{1296} > \frac{4073}{1303} > \frac{4095}{1310} > \frac{4117}{1317} > \frac{4139}{1324} > \frac{4161}{1331} > \frac{4183}{1338} > \frac{4205}{1345} > \frac{4227}{1352} > \frac{4249}{1359} > \frac{4271}{1366} > \frac{4293}{1373} > \frac{4315}{1380} > \frac{4337}{1387} > \frac{4359}{1394} > \frac{4381}{1401} > \frac{4403}{1408} > \frac{4425}{1415} > \frac{4447}{1422} > \frac{4469}{1429} > \frac{4491}{1436} > \frac{4513}{1443} > \frac{4535}{1450} > \frac{4557}{1457} > \frac{4579}{1464} > \frac{4601}{1471} > \frac{4623}{1478} > \frac{4645}{1485} > \frac{4667}{1492} > \frac{4689}{1499} > \frac{4711}{1506} > \frac{4733}{1513} > \frac{4755}{1520} > \frac{4777}{1527} > \frac{4799}{1534} > \frac{4821}{1541} > \frac{4843}{1548} > \frac{4865}{1555} > \frac{4887}{1562} > \frac{4909}{1569} > \frac{4931}{1576} > \frac{4953}{1583} > \frac{4975}{1590} > \frac{4997}{1597} > \frac{5019}{1604} > \frac{5041}{1611} > \frac{5063}{1618} > \frac{5085}{1625} > \frac{5107}{1632} > \frac{5129}{1639} > \frac{5151}{1646} > \frac{5173}{1653} > \frac{5195}{1660} > \frac{5217}{1667} > \frac{5239}{1674} > \frac{5261}{1681} > \frac{5283}{1688} > \frac{5305}{1695} > \frac{5327}{1702} > \frac{5349}{1709} > \frac{5371}{1716} > \frac{5393}{1723} > \frac{5415}{1730} > \frac{5437}{1737} > \frac{5459}{1744} > \frac{5481}{1751} > \frac{5503}{1758} > \frac{5525}{1765} > \frac{5547}{1772} > \frac{5569}{1779} > \frac{5591}{1786} > \frac{5613}{1793} > \frac{5635}{1800} > \frac{5657}{1807} > \frac{5679}{1814} > \frac{5701}{1821} > \frac{5723}{1828} > \frac{5745}{1835} > \frac{5767}{1842} > \frac{5789}{1849} > \frac{5811}{1856} > \frac{5833}{1863} > \frac{5855}{1870} > \frac{5877}{1877} > \frac{5899}{1884} > \frac{5921}{1891} > \frac{5943}{1898} > \frac{5965}{1905} > \frac{5987}{1912} > \frac{6009}{1919} > \frac{6031}{1926} > \frac{6053}{1933} > \frac{6075}{1940} > \frac{6097}{1947} > \frac{6119}{1954} > \frac{6141}{1961} > \frac{6163}{1968} > \frac{6185}{1975} > \frac{6207}{1982} > \frac{6229}{1989} > \frac{6251}{1996} > \frac{6273}{2003} > \frac{6295}{2010} > \frac{6317}{2017} > \frac{6339}{2024} > \frac{6361}{2031} > \frac{6383}{2038} > \frac{6405}{2045} > \frac{6427}{2052} > \frac{6449}{2059} > \frac{6471}{2066} > \frac{6493}{2073} > \frac{6515}{2080} > \frac{6537}{2087} > \frac{6559}{2094} > \frac{6581}{2101} > \frac{6603}{2108} > \frac{6625}{2115} > \frac{6647}{2122} > \frac{6669}{2129} > \frac{6691}{2136} > \frac{6713}{2143} > \frac{6735}{2150} > \frac{6757}{2157} > \frac{6779}{2164} > \frac{6801}{2171} > \frac{6823}{2178} > \frac{6845}{2185} > \frac{6867}{2192} > \frac{6889}{2199} > \frac{6911}{2206} > \frac{6933}{2213} > \frac{6955}{2220} > \frac{6977}{2227} > \frac{6999}{2234} > \frac{7021}{2241} > \frac{7043}{2248} > \frac{7065}{2255} > \frac{7087}{2262} > \frac{7109}{2269} > \frac{7131}{2276} > \frac{7153}{2283} > \frac{7175}{2290} > \frac{7197}{2297} > \frac{7219}{2304} > \frac{7241}{2311} > \frac{7263}{2318} > \frac{7285}{2325} > \frac{7307}{2332} > \frac{7329}{2339} > \frac{7351}{2346} > \frac{7373}{2353} > \frac{7395}{2360} > \frac{7417}{2367} > \frac{7439}{2374} > \frac{7461}{2381} > \frac{7483}{2388} > \frac{7505}{2395} > \frac{7527}{2402} > \frac{7549}{2409} > \frac{7571}{2416} > \frac{7593}{2423} > \frac{7615}{2430} > \frac{7637}{2437} > \frac{7659}{2444} > \frac{7681}{2451} > \frac{7703}{2458} > \frac{7725}{2465} > \frac{7747}{2472} > \frac{7769}{2479} > \frac{7791}{2486} > \frac{7813}{2493} > \frac{7835}{2500} > \frac{7857}{2507} > \frac{7879}{2514} > \frac{7901}{2521} > \frac{7923}{2528} > \frac{7945}{2535} > \frac{7967}{2542} > \frac{7989}{2549} > \frac{8011}{2556} > \frac{8033}{2563} > \frac{8055}{2570} > \frac{8077}{2577} > \frac{8099}{2584} > \frac{8121}{2591} > \frac{8143}{2598} > \frac{8165}{2605} > \frac{8187}{2612} > \frac{8209}{2619} > \frac{8231}{2626} > \frac{8253}{2633} > \frac{8275}{2640} > \frac{8297}{2647} > \frac{8319}{2654} > \frac{8341}{2661} > \frac{8363}{2668} > \frac{8385}{2675} > \frac{8407}{2682} > \frac{8429}{2689} > \frac{8451}{2696} > \frac{8473}{2703} > \frac{8495}{2710} > \frac{8517}{2717} > \frac{8539}{2724} > \frac{8561}{2731} > \frac{8583}{2738} > \frac{8605}{2745} > \frac{8627}{2752} > \frac{8649}{2759} > \frac{8671}{2766} > \frac{8693}{2773} > \frac{8715}{2780} > \frac{8737}{2787} > \frac{8759}{2794} > \frac{8781}{2801} > \frac{8803}{2808} > \frac{8825}{2815} > \frac{8847}{2822} > \frac{8869}{2829} > \frac{8891}{2836} > \frac{8913}{2843} > \frac{8935}{2850} > \frac{8957}{2857} > \frac{8979}{2864} > \frac{9001}{2871} > \frac{9023}{2878} > \frac{9045}{2885} > \frac{9067}{2892} > \frac{9089}{2899} > \frac{9111}{2906} > \frac{9133}{2913} > \frac{9155}{2920} > \frac{9177}{2927} > \frac{9199}{2934} > \frac{9221}{2941} > \frac{9243}{2948} > \frac{9265}{2955} > \frac{9287}{2962} > \frac{9309}{2969} > \frac{9331}{2976} > \frac{9353}{2983} > \frac{9375}{2990} > \frac{9397}{2997} > \frac{9419}{3004} > \frac{9441}{3011} > \frac{9463}{3018} > \frac{9485}{3025} > \frac{9507}{3032} > \frac{9529}{3039} > \frac{9551}{3046} > \frac{9573}{3053} > \frac{9595}{3060} > \frac{9617}{3067} > \frac{9639}{3074} > \frac{9661}{3081} > \frac{9683}{3088} > \frac{9705}{3095} > \frac{9727}{3102} > \frac{9749}{3109} > \frac{9771}{3116} > \frac{9793}{3123} > \frac{9815}{3130} > \frac{9837}{3137} > \frac{9859}{3144} > \frac{9881}{3151} > \frac{9903}{3158} > \frac{9925}{3165} > \frac{9947}{3172} > \frac{9969}{3179} > \frac{9991}{3186} > \frac{10013}{3193} > \frac{10035}{3200} > \frac{10057}{3207} > \frac{10079}{3214} > \frac{10101}{3221} > \frac{10123}{3228} > \frac{10145}{3235} > \frac{10167}{3242} > \frac{10189}{3249} > \frac{10211}{3256} > \frac{10233}{3263} > \frac{10255}{3270} > \frac{10277}{3277} > \frac{10299}{3284} > \frac{10321}{3291} > \frac{10343}{3298} > \frac{10365}{3305} > \frac{10387}{3312} > \frac{10409}{3319} > \frac{10431}{3326} > \frac{10453}{3333} > \frac{10475}{3340} > \frac{10497}{3347} > \frac{10519}{3354} > \frac{10541}{3361} > \frac{10563}{3368} > \frac{10585}{3375} > \frac{10607}{3382} > \frac{10629}{3389} > \frac{10651}{3396} > \frac{10673}{3403} > \frac{10695}{3410} > \frac{10717}{3417} > \frac{10739}{3424} > \frac{10761}{3431} > \frac{10783}{3438} > \frac{10805}{3445} > \frac{10827}{3452} > \frac{10849}{3459} > \frac{10871}{3466} > \frac{10893}{3473} > \frac{10915}{3480} > \frac{10937}{3487} > \frac{10959}{3494} > \frac{10981}{3501} > \frac{11003}{3508} > \frac{11025}{3515} > \frac{11047}{3522} > \frac{11069}{3529} > \frac{11091}{3536} > \frac{11113}{3543} > \frac{11135}{3550} > \frac{11157}{3557} > \frac{11179}{3564} > \frac{11201}{3571} > \frac{11223}{3578} > \frac{11245}{3585} > \frac{11267}{3592} > \frac{11289}{3599} > \frac{11311}{3606} > \frac{11333}{3613} > \frac{11355}{3620} > \frac{11377}{3627} > \frac{11399}{3634} > \frac{11421}{3641} > \frac{11443}{3648} > \frac{11465}{3655} > \frac{11487}{3662} > \frac{11509}{3669} > \frac{11531}{3676} > \frac{11553}{3683} > \frac{11575}{3690} > \frac{11597}{3697} > \frac{11619}{3704} > \frac{11641}{3711} > \frac{11663}{3718} > \frac{11685}{3725} > \frac{11707}{3732} > \frac{11729}{3739} > \frac{11751}{3746} > \frac{11773}{3753} > \frac{11795}{3760} > \frac{11817}{3767} > \frac{11839}{3774} > \frac{11861}{3781} > \frac{11883}{3788} > \frac{11905}{3795} > \frac{11927}{3802} > \frac{11949}{3809} > \frac{11971}{3816} > \frac{11993}{3823} > \frac{12015}{3830} > \frac{12037}{3837} > \frac{12059}{3844} > \frac{12081}{3851} > \frac{12103}{3858} > \frac{12125}{3865} > \frac{12147}{3872} > \frac{12169}{3879} > \frac{12191}{3886} > \frac{12213}{3893} > \frac{12235}{3900} > \frac{12257}{3907} > \frac{12279}{3914} > \frac{12301}{3921} > \frac{12323}{3928} > \frac{12345}{3935} > \frac{12367}{3942} > \frac{12389}{3949} > \frac{12411}{3956} > \frac{12433}{3963} > \frac{12455}{3970} > \frac{12477}{3977} > \frac{12499}{3984} > \frac{12521}{3991} > \frac{12543}{3998} > \frac{12565}{4005} > \frac{12587}{4012} > \frac{12609}{4019} > \frac{12631}{4026} > \frac{12653}{4033} > \frac{12675}{4040} > \frac{12697}{4047} > \frac{12719}{4054} > \frac{12741}{4061} > \frac{12763}{4068} > \frac{12785}{4075} > \frac{12807}{4082} > \frac{12829}{4089} > \frac{12851}{4096} > \frac{12873}{4103} > \frac{12895}{4110} > \frac{12917}{4117} > \frac{12939}{4124} > \frac{12961}{4131} > \frac{12983}{4138} > \frac{13005}{4145} > \frac{13027}{4152} > \frac{13049}{4159} > \frac{13071}{4166} > \frac{13093}{4173} > \frac{13115}{4180} > \frac{13137}{4187} > \frac{13159}{4194} > \frac{13181}{4201} > \frac{13203}{4208} > \frac{13225}{4215} > \frac{13247}{4222} > \frac{13269}{4229} > \frac{13291}{4236} > \frac{13313}{4243} > \frac{13335}{4250} > \frac{13357}{4257} > \frac{13379}{4264} > \frac{13401}{4271} > \frac{13423}{4278} > \frac{13445}{4285} > \frac{13467}{4292} > \frac{13489}{4299} > \frac{13511}{4306} > \frac{13533}{4313} > \frac{13555}{4320} > \frac{13577}{4327} > \frac{13599}{4334} > \frac{13621}{4341} > \frac{13643}{4348} > \frac{13665}{4355} > \frac{13687}{4362} > \frac{13709}{4369} > \frac{13731}{4376} > \frac{13753}{4383} > \frac{13775}{4390} > \frac{13797}{4397} > \frac{13819}{4404} > \frac{13841}{4411} > \frac{13863}{4418} > \frac{13885}{4425} > \frac{13907}{4432} > \frac{13929}{4439} > \frac{13951}{4446} > \frac{13973}{4453} > \frac{13995}{4460} > \frac{14017}{4467} > \frac{14039}{4474} > \frac{14061}{4481} > \frac{14083}{4488} > \frac{14105}{4495} > \frac{14127}{4502} > \frac{14149}{4509} > \frac{14171}{4516} > \frac{14193}{4523} > \frac{14215}{4530} > \frac{14237}{4537} > \frac{14259}{4544} > \frac{14281}{4551} > \frac{14303}{4558} > \frac{14325}{4565} > \frac{14347}{4572} > \frac{14369}{4579} > \frac{14391}{4586} > \frac{14413}{4593} > \frac{14435}{4600} > \frac{14457}{4607} > \frac{14479}{4614} > \frac{14501}{4621} > \frac{14523}{4628} > \frac{14545}{4635} > \frac{14567}{4642} > \frac{14589}{4649} > \frac{14611}{4656} > \frac{14633}{4663} > \frac{14655}{4670} > \frac{14677}{4677} > \frac{14699}{4684} > \frac{14721}{4691} > \frac{14743}{4698} > \frac{14765}{4705} > \frac{14787}{4712} > \frac{14809}{4719} > \frac{14831}{4726} > \frac{14853}{4733} > \frac{14875}{4740} > \frac{14897}{4747} > \frac{14919}{4754} > \frac{14941}{4761} > \frac{14963}{4768} > \frac{14985}{4775} > \frac{15007}{4782} > \frac{15029}{4789} > \frac{15051}{4796} > \frac{15073}{4803} > \frac{15095}{4810} > \frac{15117}{4817} > \frac{15139}{4824} > \frac{15161}{4831} > \frac{15183}{4838} > \frac{15205}{4845} > \frac{15227}{4852} > \frac{15249}{4859} > \frac{15271}{4866} > \frac{15293}{4873} > \frac{15315}{4880} > \frac{15337}{4887} > \frac{15359}{4894} > \frac{15381}{4901} > \frac{15403}{4908} > \frac{15425}{4915} > \frac{15447}{4922} > \frac{15469}{4929} > \frac{15491}{4936} > \frac{15513}{4943} > \frac{15535}{4950} > \frac{15557}{4957} > \frac{15579}{4964} > \frac{15601}{4971} > \frac{15623}{4978} > \frac{15645}{4985} > \frac{15667}{4992} > \frac{15689}{4999} > \frac{15711}{5006} > \frac{15733}{5013} > \frac{15755}{5020} > \frac{15777}{5027} > \frac{15799}{5034} > \frac{15821}{5041} > \frac{15843}{5048} > \frac{15865}{5055} > \frac{15887}{5062} > \frac{15909}{5069} > \frac{15931}{5076} > \frac{15953}{5083} > \frac{15975}{5090} > \frac{15997}{5097} > \frac{16019}{5104} > \frac{16041}{5111} > \frac{16063}{5118} > \frac{16085}{5125} > \frac{16107}{5132} > \frac{16129}{5139} > \frac{16151}{5146} > \frac{16173}{5153} > \frac{16195}{5160} > \frac{16217}{5167} > \frac{16239}{5174} > \frac{16261}{5181} > \frac{16283}{5188} > \frac{16305}{5195} > \frac{16327}{5202} > \frac{16349}{5209} > \frac{16371}{5216} > \frac{16393}{5223} > \frac{16415}{5230} > \frac{16437}{5237} > \frac{16459}{5244} > \frac{16481}{5251} > \frac{16503}{5258} > \frac{16525}{5265} > \frac{16547}{5272} > \frac{16569}{5279} > \frac{16591}{5286} > \frac{16613}{5293} > \frac{16635}{5$$

fussent précisément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, & que d'ailleurs les périodes des planetes sont incommensurables, ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on est obligé de se contenter d'un *à-peu-près*, & la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, & plus que ne pourroient faire d'autres rapports quelconques qui ne seroient pas conçus en termes plus grands.

M. Huyghens résout cette question par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-dessus; il donne la maniere de former ces fractions par des divisions continuelles, & il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes. qui en résultent, sans oublier

même les fractions *intermédiaires*. Voyez dans ses *Opera posthuma* le Traité intitulé *Descriptio automati planetarii*.

D'autres grands Géometres ont ensuite considéré les fractions continues d'une maniere plus générale. On trouve sur-tout dans les Commentaires de Pétersbourg, (tom. IX & XI des anciens, & tom. IX & XI des nouveaux), des Mémoires de M^r. Euler remplis des recherches les plus savantes & les plus ingénieuses sur ce sujet; mais la théorie de ces fractions, envisagée du côté arithmétique qui en est le plus intéressant, n'avoit pas encore été, ce me semble, autant cultivée qu'elle le méritoit; c'est ce qui m'a engagé à en composer ce petit Traité pour la rendre plus familiere aux Géometres. Voyez aussi les Mémoires de Berlin pour les années 1767 & 1768.

Au reste cette théorie est d'un usage très-étendu dans toute l'Arithmétique, & il y a peu de problemes de cette science, au moins parmi ceux pour lesquels les regles

ordinaires ne fussent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement. M^r. Jean Bernoulli vient d'en faire une application heureuse & utile dans une nouvelle espece de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la construction des tables de parties proportionnelles. Voyez le tome I de son *Recueil pour les Astronomes*.



PARAGRAPHE II.

Solutions de quelques Problemes curieux & nouveaux d'Arithmétique.

QUOIQUE les problemes dont nous allons nous occuper aient un rapport immédiat avec le précédent, & dépendent des mêmes principes, nous croyons cependant devoir les traiter d'une maniere distincte, & sans rien supposer de ce qui a été démontré jusqu'ici.

On aura par ce moyen la satisfaction de voir comment dans ces sortes de matieres on est nécessairement conduit à la théorie des fractions continues; d'ailleurs cette théorie en deviendra beaucoup plus lumineuse, & recevra par-là de nouveaux degrés de perfection.

PROBLEME I.

23. Etant donnée une quantité positive a , rationnelle ou non, & supposant que p & q ne puissent être que des nombres entiers po-

suifs & premiers entr'eux, on demande de trouver des valeurs de p & q , telles que la valeur de $p-aq$, (abstraction faite du signe), soit plus petite qu'elle ne seroit, si on donnoit à p & q des valeurs moindres quelconques.

Pour pouvoir résoudre ce problème directement, nous commencerons par supposer que l'on ait en effet déjà trouvé des valeurs de p & q qui aient les conditions requises; donc prenant pour r & f des nombres quelconques entiers positifs moindres que p & q , il faudra que la valeur de $p-aq$ soit moindre que celle de $r-as$, abstraction faite des signes de ces deux quantités, c'est-à-dire en les prenant toutes deux positivement. Or je remarque d'abord que si les nombres r & f sont tels que $pf-qf = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu lorsque $p-aq$ est un nombre positif, & l'inférieur, lorsque $p-aq$ est un nombre négatif, on en peut conclure en général que la valeur de toute expression $y-az$ sera toujours plus grande, (abstraction faite du signe), que celle de $p-aq$, tant qu'on ne donnera

à z & à y que des valeurs entières, moindres que celles de p & q .

En effet, il est clair qu'on peut supposer en général

$$y = pt + ru, \text{ \& } z = qt + ru,$$

t & u étant deux inconnues; or par la résolution de ces équations on a

$$t = \frac{qy - rz}{pf - qf}, \quad u = \frac{py - rz}{qf - pf};$$

donc, à cause de $pf - qf = \pm 1$, $t = \pm (qy - rz)$, & $u = \pm (py - rz)$; d'où l'on voit que t & u seront toujours des nombres entiers, puisque p, q, r, f & y, z sont supposés entiers.

Donc, t & u étant des nombres entiers, & p, q, r, f des nombres entiers positifs, il est clair que pour que les valeurs de y & z soient moindres que celles de p & q , il faudra nécessairement que les nombres t & u soient de signes différens.

Maintenant je remarque que la valeur de $r-as$ sera aussi de différent signe que celle de $p-aq$; car faisant $p-aq = P$, & $r-as = R$, on aura $\frac{P}{p} = a + \frac{r}{p}$, $\frac{R}{r} = a$

$\pm \frac{R}{f}$; mais l'équation $pf - qr = \pm 1$, donne
 $\frac{p}{f} - \frac{r}{f} = \pm \frac{1}{f}$; donc $\frac{p}{f} - \frac{R}{f} = \pm \frac{1}{f}$; donc,
 puisqu'on suppose que le signe ambigu soit
 pris conformément à celui de la quantité
 $p - aq$ ou P , il faudra que la quantité $\frac{p}{f}$
 $-\frac{R}{f}$ soit positive, si P est positif, & né-
 gative, si P est négatif; or comme f est
 $< q$, & que R est plus grand que P , (*hyp.*),
 il est clair que $\frac{R}{f}$ sera à plus forte raison plus
 grand que $\frac{p}{f}$, (abstraction faite du signe);
 donc la quantité $\frac{p}{f} - \frac{R}{f}$ sera toujours de signe
 différent de $\frac{R}{f}$, c'est-à-dire de R , puisque
 f est positif; donc P & R seront néces-
 sairement de signes différens.

Cela posé, on aura, en substituant les
 valeurs ci-dessus de y & z , $y - az = (p$
 $- aq)t + (r - af)u = Pt + Ru$; or t & u
 étant de signes différens, aussi bien que P
 & R , il est clair que Pt & Ru seront des
 quantités de mêmes signes; donc puisque
 t & u sont d'ailleurs des nombres entiers,
 il est visible que la valeur de $y - az$ sera
 toujours plus grande que P , c'est-à-dire
 que

que la valeur de $p - aq$, abstraction faite
 des signes.

Mais il reste maintenant à savoir si, les
 nombres p & q étant donnés, on peut tou-
 jours trouver des nombres r & f moindres
 que ceux-là, & tels que $pf - qr = \pm 1$, les
 signes ambigus étant à volonté; or cela suit
 évidemment de la théorie des fractions con-
 tinues; mais on peut aussi le démontrer di-
 rectement & indépendamment de cette
 théorie. Car la difficulté se réduit à prouver
 qu'il existe nécessairement un nombre entier
 positif & moindre que p , lequel étant pris
 pour r , rendra $qr \pm 1$ divisible par p ; or
 supposons qu'on substitue successivement à
 la place de r les nombres naturels 1, 2,
 3, &c. jusqu'à p , & qu'on divise les nom-
 bres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, &c. $pq \pm 1$ par p ,
 on aura p , restes moindres que p , qui seront
 nécessairement tous différens les uns des
 autres; car si, par exemple, $mq \pm 1$ & nq
 ± 1 , (m & n étant des nombres entiers dif-
 férens qui ne surpassent pas p), étant di-
 visés par p , donnoient un même reste, il

est clair que leur différence, $(m-n)q$, devrait être divisible par p ; or c'est ce qui ne se peut, à cause que q est premier à p , & que $m-n$ est un nombre moindre que p . Donc, puisque tous les restes dont il s'agit, sont des nombres entiers positifs moindres que p & différens entr'eux, & que ces restes sont au nombre de p , il est clair qu'il faudra nécessairement que le zéro se trouve parmi ces restes, & conséquemment qu'il y ait un des nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, &c. $pq \pm 1$, qui soit divisible par p ; or il est clair que ce ne peut être le dernier; ainsi il y aura sûrement une valeur de r moindre que p , laquelle rendra $rq \pm 1$ divisible par p ; & il est clair en même temps que le quotient sera moindre que q ; donc il y aura toujours une valeur entière & positive de r moindre que p , & une autre valeur pareille de s & moindre que q , lesquelles satisferont à l'équation $f = \frac{p}{q}$, ou $ps - qr = \pm 1$.

24. La question est donc réduite maintenant à trouver quatre nombres entiers & positifs, p , q , r , s ; dont les deux derniers

soient moindres que les premiers, c'est-à-dire $r < p$ & $s < q$, & qui soient tels que $ps - qr = \pm 1$, que de plus les quantités $p - aq$ & $r - as$ soient de signes différens, & qu'en même temps $r - as$ soit une quantité plus grande que $p - aq$, abstraction faite des signes.

Désignons, pour plus de simplicité, r par p' & s par q' , en sorte que l'on ait $pq' - qp' = \pm 1$; & comme $q > q'$, (*hyp.*), soit μ le quotient qui proviendrait de la division de q par q' , & soit le reste q'' , qui sera par conséquent $< q'$; soit de même μ' le quotient de la division de q' par q'' , & q''' le reste, qui sera $< q''$; pareillement soit μ'' le quotient de la division de q'' par q''' , & q^{iv} le reste $< q'''$, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul; on aura de cette manière

$$q = \mu q' + q''$$

$$q' = \mu' q'' + q'''$$

$$q'' = \mu'' q''' + q^{iv}$$

$$q''' = \mu''' q^{iv} + q^v, \text{ \&c.}$$

où les nombres μ , μ' , μ'' , &c. seront tous entiers & positifs, & où les nombres q , q' ,

q'' , q''' , &c. feront auffi entiers positifs ; & formeront une fuite décroiffante jufqu'à zéro.

Supposons pareillement

$$p = \mu p' + p''$$

$$p' = \mu' p'' + p'''$$

$$p'' = \mu'' p''' + p^{iv}$$

$$p''' = \mu''' p^{iv} + p^v, \text{ \&c.}$$

Et comme les nombres p & p' font regardés ici comme donnés, auffi bien que les nombres μ , μ' , μ'' , &c. on pourra déterminer par ces équations les nombres p'' , p''' , p^{iv} , &c. qui feront évidemment tous entiers.

Maintenant, comme on doit avoir $p q' - q p' = \pm 1$, on aura auffi, en fubftituant les valeurs précédentes de p & q , & effaçant ce qui fe détruit, $p' q' - q'' p' = \pm 1$; & fubftituant de nouveau dans cette équation les valeurs de p' & q' , il viendra $p'' q''' - q'' p''' = \pm 1$, & ainfi de fuite ; de forte qu'on aura en général

$$p q' - q p' = \pm 1$$

$$p' q'' - q' p'' = \pm 1$$

$$p'' q''' - q'' p''' = \pm 1$$

$$p''' q^{iv} - q''' p^{iv} = \pm 1, \text{ \&c.}$$

Donc, fi q''' , par exemple, étoit nul, on auroit $-q'' p''' = \pm 1$; donc $q'' = 1$ & $p''' = \mp 1$; mais fi q^{iv} étoit $= 0$, on auroit $-q''' p^{iv} = \pm 1$; donc $q''' = 1$ & $p^{iv} = \mp 1$; donc en général, fi $q^r = 0$, on aura $q^{r-1} = 1$; & enfuite $p^r = \pm 1$, fi r eft pair, & $p^r = \mp 1$, fi r eft impair.

Or, comme on ne fait pas d'avance fi c'est le figne fupérieur ou l'inférieur qui doit avoir lieu, il faudroit fuppofer fucceffivement $p^r = 1$ & $= -1$; mais je remarque que l'on peut toujours ramener l'un de ces cas à l'autre ; & pour cela il eft clair qu'il fuffit de prouver qu'on peut toujours faire en forte que le p du terme q^r qui doit être nul, foit pair ou impair à volonté. En effet, fupposons, par exemple, que q'' foit $= 0$, on aura donc $q''' = 1$ & $q' > 1$, c'est-à-dire $q'' = 2$ ou > 2 , à caufe que les nombres q , q' , q'' , &c. forment naturellement une férie décroiffante ; donc, puifque $q'' = \mu'' q''' + q^{iv}$, on aura $q'' = \mu''$, de forte que μ'' fera $=$ ou > 2 ; ainfi on pourra, fi l'on veut, diminuer μ'' d'une

unité, sans que ce nombre devienne nul, & alors q'' , qui étoit $=0$, deviendra $=1$, & q'' sera $=0$; car mettant $\mu''=1$ à la place de μ'' , on aura $q''=(\mu''-1)q''' + q''$; mais $q''=\mu''$, $q'''=1$; donc $q''=1$; ensuite ayant $q'''=\mu'''q''+q'$, c'est-à-dire $1=\mu''' + q'$, on aura nécessairement $\mu'''=1$ & $q'=0$.

De-là on peut donc conclure en général que, si $q'=0$, on aura $q''=1$ & $p'=+1$, le signe ambigu étant à volonté.

Maintenant, si on substitue les valeurs de p & q données par les formules précédentes dans $p-aq$, celles de p' & q' dans $p'-aq'$, & ainsi des autres, on aura

$$\begin{aligned} p-aq &= \mu (p'-aq') + p''-aq'' \\ p'-aq' &= \mu' (p''-aq'') + p'''-aq''' \\ p''-aq'' &= \mu'' (p'''-aq''') + p''''-aq'''' \\ p'''-aq''' &= \mu''' (p''''-aq''') + p'''''-aq''''', \\ &\text{&c.} \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{aq''-p''}{p'-aq'} + \frac{p-aq}{p''-aq''}$$

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{aq'''-p'''}{p''-aq''} + \frac{p'-aq'}{p'''-aq'''} \\ \mu'' &= \frac{aq''''-p''''}{p'''-aq'''} + \frac{p''-aq''}{p''''-aq''''} \\ \mu''' &= \frac{aq''''-p''''}{p''''-aq''''} + \frac{p'''-aq'''}{p'''''-aq'''''}, \text{ &c.} \end{aligned}$$

Or comme, (*hyp.*), les quantités $p-aq$ & $p'-aq'$ sont de signes différens, & que de plus $p'-aq'$ doit être, (abstraction faite des signes) $> p-aq$, il s'ensuit que $\frac{p-aq}{p'-aq'}$

fera une quantité négative & plus petite que l'unité. Donc, pour que μ soit un nombre entier positif, comme il le faut, il est clair que $\frac{aq''-p''}{p'-aq'}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité; & il est visible en même temps que μ ne peut être que le nombre entier, qui est immédiatement moindre que $\frac{aq''-p''}{p'-aq'}$, c'est-à-dire,

qui est contenu entre ces limites $\frac{aq''-p''}{p'-aq'}$ & $\frac{aq''-p''}{p'-aq'} - 1$; car puisque $\frac{p-aq}{p''-aq''}$

> 0 & < 1 , on aura $\mu < \frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$, &
 $> \frac{aq'' - p''}{p' - aq'} - 1$.

De même, puisque nous venons de voir que $\frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité, il s'ensuit que $\frac{p' - aq'}{p'' - aq''}$ sera une quantité négative plus petite que l'unité, (je dis plus petite que l'unité, en faisant abstraction du signe). Donc, pour que μ' soit un nombre entier positif, il faudra que $\frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''}$ soit une quantité positive plus grande que l'unité, & le nombre μ' ne pourra être par conséquent que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessus de la quantité $\frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''}$.

On prouvera de la même manière & par la considération, que μ'' doit être un nombre entier positif, que la quantité $\frac{aq^{iv} - p^{iv}}{p''' - aq'''}$

sera nécessairement positive & au-dessus de l'unité, & que μ''' ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la même quantité, & ainsi de suite.

Il s'ensuit de-là, 1°. que les quantités $p - aq$, $p' - aq'$, $p'' - aq''$, &c. seront successivement de signes différens, c'est-à-d. alternativement positives & négatives, & qu'elles formeront une suite continuellement croissante; 2°. que si on désigne par le signe $<$ le nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe, on aura pour la détermination des nombres μ , μ' , μ'' , &c.

$$\mu < \frac{aq'' - p''}{p' - aq'}$$

$$\mu' < \frac{aq''' - p'''}{p'' - aq''}$$

$$\mu'' < \frac{aq^{iv} - p^{iv}}{p''' - aq'''}, \text{ \&c.}$$

Or nous avons vu plus haut que la série q , q' , q'' , &c. doit se terminer par zéro, & qu'alors le terme précédent sera $= 1$, &

le terme correspondant à zéro dans l'autre série $p, p', p'',$ &c. sera ± 1 à volonté.

Ainsi supposons, par exemple, que l'on ait $q''=0$, on aura donc $q'''=1$ & $p'''=1$; donc $p'''-aq'''=p'''-a$, & $p''-aq''=1$; donc il faudra que $p'''-a$ soit une quantité négative & moindre que 1, abstraction faite du signe; c'est-à-dire que $a-p'''$ devra être >0 & <1 ; de sorte que p''' ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de a ; on connoitra donc les valeurs de ces quatre termes

$$p''=1 \quad q''=0$$

$$p'''<a \quad q'''=1,$$

à l'aide desquelles on pourra, en remontant par les formules ci-dessus, trouver tous les termes précédents. En effet on aura d'abord la valeur de μ'' , ensuite on aura p'' & q'' par les formules $p''=\mu''p''' + p'''$ & $q''=\mu''q''' + q'''$; de-là on trouvera μ' & ensuite p' & q' , & ainsi du reste.

En général soit $q''=0$, on aura $q'''=1$ & $p'''=1$; & on prouvera, comme ci-dessus, que p''' ne pourra être que le nombre entier

qui est immédiatement au-dessous de a ; de sorte qu'on aura ces quatre termes

$$p''=1 \quad q''=0$$

$$p'''<a \quad q'''=1;$$

ensuite on aura

$$\mu^{t-2} < \frac{a q^t - p^t}{p^{t-1} - a q^{t-1}} < \frac{1}{a - p^{t-1}}$$

$$p^{t-2} = \mu^{t-2} p^{t-1} + p^t, \quad q^{t-2} = \mu^{t-2} q^{t-1} + q^t$$

$$\mu^{t-3} < \frac{a q^{t-1} + p^{t-1}}{p^{t-2} + a q^{t-2}}$$

$$p^{t-3} = \mu^{t-3} p^{t-2} + p^{t-1}, \quad q^{t-3} = \mu^{t-3} q^{t-2} + q^{t-1},$$

& ainsi de suite.

On pourra donc remonter de cette manière aux premiers termes p & q ; mais nous remarquerons que tous les termes suivans, $p', q', p'', q'',$ &c. jouissent des mêmes propriétés que ceux-là, & résolvent également le problème proposé. Car il est visible par les formules précédentes que les nombres $p, p', p'',$ &c. & $q, q', q'',$ &c. sont tous entiers positifs, & forment deux séries continuellement décroissantes, dont la première se termine par l'unité, & la seconde par zéro.

De plus, on a vu que ces nombres sont tels, que $pq - qp = +1$, $p'q' - q'p' = +1$, &c. & que les quantités $p - aq$, $p' - aq'$, $p'' - aq''$, &c. sont alternativement positives & négatives, & forment en même temps une suite continuellement croissante. D'où il suit que les mêmes conditions qui ont lieu entre les quatre nombres p, q, r, f , ou p, q, p', q' , & d'où dépend la solution du problème, comme on l'a vu plus haut, ont lieu également entre les nombres p', q', p'', q'' , & entre ceux-ci, p'', q'', p''', q''' , & ainsi de suite.

Donc, en commençant par les derniers termes p' & q' , & remontant toujours par les formules qu'on vient de trouver, on aura successivement toutes les valeurs de p & q qui peuvent résoudre la question proposée.

25. Comme les valeurs des termes p', p'^{-1} , &c. q', q'^{-1} , &c. sont indépendantes de l'exposant p , nous pouvons en faire abstraction, & désigner les termes de ces deux séries croissantes de cette manière,

$p^0, p', p'', p''',$ &c. $q^0, q', q'', q''',$ &c. ainsi nous aurons les déterminations suivantes,

$$\begin{array}{ll} p^0 = 1 & q^0 = 0 \\ p' = \mu & q' = 1 \\ p'' = \mu' p' + 1 & q'' = \mu' \\ p''' = \mu'' p'' + p' & q''' = \mu'' q'' + q' \\ p^{iv} = \mu''' p''' + p'' & q^{iv} = \mu''' q''' + q'' \\ & \text{\&c.} \end{array}$$

Ensuite

$$\begin{array}{l} \mu < a \\ \mu' < \frac{p^0 - q^0}{a q' - p^0} < \frac{1}{a - \mu} \\ \mu'' < \frac{a q' - p^0}{p'' - a q''} \\ \mu''' < \frac{p'' - a q''}{a q''' - p'''} \\ \mu^{iv} < \frac{a q''' - p'''}{p^{iv} - a q^{iv}}, \text{ \&c.} \end{array}$$

où le signe $<$ dénote le nombre entier qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe.

On trouvera ainsi successivement toutes les valeurs de p & q qui pourront satisfaire

au problème, ces valeurs ne pouvant être que les termes correspondans des deux séries $p^0, p^1, p^2, p^3, \&c.$ & $q^0, q^1, q^2, q^3, \&c.$

COROLLAIRE I.

26. Si on fait

$$b = \frac{p^0 - q^0}{aq^1 - p^1}$$

$$c = \frac{aq^1 - p^1}{p^1 - aq^2}$$

$$d = \frac{p^1 - aq^2}{aq^2 - p^2}, \&c.$$

on aura, comme il est facile de le voir,

$$b = \frac{1}{a - \mu}$$

$$c = \frac{1}{b - \mu'}$$

$$d = \frac{1}{c - \mu''}, \&c.$$

& $\mu < a$, $\mu' < b$, $\mu'' < c$, $\mu''' < d$, &c. donc les nombres μ , μ' , μ'' , &c. ne seront autre chose que ceux que nous avons désignés par a , β , γ , &c. dans l'art. 3, c'est-à-dire que ces nombres seront les termes de la

fraction continue qui représente la valeur de a , en sorte que l'on aura ici

$$a = \mu + \frac{1}{\mu' + \frac{1}{\mu''} + \&c.}$$

Par conséquent les nombres $p^1, p^2, p^3, \&c.$ seront les numérateurs, & $q^1, q^2, q^3, \&c.$ les dénominateurs des fractions convergentes vers a , fractions que nous avons désignées ci-devant par $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, &c. (art. 10).

Ainsi tout se réduit à convertir la valeur de a en une fraction continue, dont tous les termes soient positifs, ce qu'on peut exécuter par les méthodes exposées plus haut, pourvu qu'on ait soin de prendre toujours les valeurs approchées en défaut; ensuite il n'y aura plus qu'à former la suite des fractions principales convergentes vers a , & les termes de chacune de ces fractions donneront des valeurs de p & q , qui résoudront le problème proposé; de sorte que $\frac{p}{q}$ ne pourra être qu'une de ces mêmes fractions.

COROLLAIRE II.

27. Il résulte de-là une nouvelle propriété des fractions dont nous parlons ; c'est que nommant $\frac{p}{q}$ une des fractions principales convergentes vers a , (pourvu qu'elles soient déduites d'une fraction continue, dont tous les termes soient positifs), la quantité $p-aq$ aura toujours une valeur plus petite, (abstraction faite du signe), qu'elle n'auroit, si on y mettoit à la place de p & q d'autres nombres moindres quelconques.

PROBLÈME II.

28. Etant proposée la quantité $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \dots$, &c. $+ Vq^m$, dans laquelle A, B, C , &c. sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, & où p & q sont des nombres indéterminés qu'on suppose devoir être entiers & positifs ; on demande quelles valeurs on doit donner à p & q , pour que la quantité proposée devienne la plus petite qu'il est possible.

Soient α, β, γ , &c. les racines réelles, &c.

& $\mu \pm \sqrt{-1}$, $\pi \pm \sqrt{-1}$, &c. les racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots, \text{ \&c. } + V = 0,$$

on aura par la théorie des équations $Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \dots$, &c. $+ Vq^m = A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\dots(p-(\mu \pm \sqrt{-1})q)(p-(\mu \mp \sqrt{-1})q)(p-(\pi \pm \sqrt{-1})q)(p-(\pi \mp \sqrt{-1})q)\dots = A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\dots((p-\mu q)^2 + q^2)((p-\pi q)^2 + q^2)\dots$

Donc la question se réduit à faire en sorte que le produit des quantités $p-\alpha q$, $p-\beta q$, $p-\gamma q$, &c. & $(p-\mu q)^2 + q^2$, $(p-\pi q)^2 + q^2$, &c. soit le plus petit qu'il est possible, tant que p & q sont des nombres entiers positifs.

Supposons qu'on ait trouvé les valeurs de p & q qui répondent au minimum ; & si l'on met à la place de p & q d'autres nombres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, acquiere une valeur plus grande. Donc il faudra nécessairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il est visible que si α , par exemp.

étoit négatif, le facteur $p - aq$ diminueroit toujours, lorsque p & q décroistroient; la même chose arriveroit au facteur $(p - \mu q)^2 + v^2 q^2$, si μ étoit négatif, & ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels il n'y a que ceux où les racines sont positives, qui puissent augmenter de valeur; & parmi les facteurs doubles imaginaires, il n'y aura que ceux où la partie réelle de la racine imaginaire sera positive, qui puissent augmenter aussi; de plus il faut remarquer à l'égard de ces derniers, que pour que $(p - \mu q)^2 + v^2 q^2$ augmente tandis que p & q diminuent, il faut nécessairement que la partie $(p - \mu q)^2$ augmente, parce que l'autre terme $v^2 q^2$ diminué nécessairement; de sorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de la quantité $p - \mu q$, & ainsi des autres.

Donc les valeurs de p & q qui répondent au *minimum*, doivent être telles que la quantité $p - aq$ augmente, en donnant à p & q des valeurs moindres, & prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation

$A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \dots + V = 0$, ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, s'il y en a.

Soient r & s deux nombres entiers positifs moindres que p & q ; il faudra donc que $r - as$ soit $> p - aq$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose, comme dans l'article 23, que ces nombres soient tels que $ps - qr = \pm 1$, le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p - aq$ est positive; & l'inférieur, lorsque $p - aq$ est négative; en sorte que les deux quantités $p - aq$ & $r - as$ deviennent de différens signes, & l'on aura exactement le cas auquel nous avons réduit le problème précédent, (art. 24), & dont nous avons déjà donné la solution.

Donc (art. 26), les valeurs de p & q devront nécessairement se trouver parmi les termes des fractions principales convergentes vers a , c'est-à-dire vers quelqu'une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a . Ainsi il faudra réduire

toutes ces quantités en fractions continues, (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enseignées ailleurs), & en déduire ensuite les fractions convergentes dont il s'agit, après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, & q égal aux dénominateurs correspondans, & celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au *minimum* cherché.

REMARQUE I.

29. Nous avons supposé que les nombres p & q devoient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenoit tous deux négatifs, il n'en résulteroit aucun changement dans la valeur absolue de la formule proposée; elle ne feroit que changer de signe dans le cas où l'exposant m seroit impair; & elle demeureroit absolument la même, dans le cas où l'exposant m seroit pair; ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres p & q ; lorsqu'on les suppose tous deux de mêmes signes.

Mais il n'en sera pas de même, si on donne à p & q des signes différens; car alors les termes alternatifs de l'équation proposée changeront de signe, ce qui en fera changer aussi aux racines α , β , γ , &c. $\mu \pm \sqrt{-1}$, $\pi \pm \sqrt{-1}$, &c. de sorte que celles des quantités α , β , γ , &c. μ , π , &c. qui étoient négatives, & par conséquent inutiles dans le premier cas, deviendront positives dans celui-ci, & devront être employées à la place des autres.

De-là je conclus en général que lorsqu'on recherche le *minimum* de la formule proposée sans autre restriction, sinon que p & q soient des nombres entiers, il faut prendre successivement pour a toutes les racines réelles α , β , γ , &c. & toutes les parties réelles μ , π , &c. des racines imaginaires de l'équation

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + V = 0$, en faisant abstraction des signes de ces quantités; mais ensuite il faudra donner à p & q les mêmes signes, ou des signes différens, suivant que la quantité qu'on aura

prise pour a , aura eu originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE I.

30. Lorsque parmi les racines réelles α , β , γ , &c. il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines; de sorte que dans ce cas il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum*; dans tous les autres cas il sera impossible que la quantité dont il s'agit devienne zéro, tant que p & q seront des nombres entiers; or comme les coefficients A , B , C , &c. sont aussi des nombres entiers, (*hyp.*) cette quantité sera toujours égale à un nombre entier, & par conséquent elle ne pourra jamais être moindre que l'unité.

Donc si on avoit à résoudre en nombres entiers l'équation

$Ax^m + Bx^{m-1}q + Cx^{m-2}q^2 + \&c. + Vq^m = \pm 1$,
il faudroit chercher les valeurs de p & q par la méthode du problème précédent,

excepté dans les cas où l'équation

$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \&c. + V = 0$,
auroit des racines ou des diviseurs quelconques commensurables; car alors il est visible que la quantité

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 + \&c.$$

pourroit se décomposer en deux ou plusieurs quantités semblables de degrés moindres; de sorte qu'il faudroit que chacune de ces formules partielles fût égale à l'unité en particulier, ce qui donneroit pour le moins deux équations qui serviroient à déterminer p & q .

Nous avons déjà donné ailleurs, (*Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1768*), une solution de ce dernier problème; mais celle que nous venons d'indiquer est beaucoup plus simple & plus directe, quoique toutes les deux dépendent de la même théorie des fractions continues.

PROBLEME III.

31. On demande les valeurs de p & de q , qui rendront la quantité

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

la plus petite qu'il est possible, dans l'hypothèse qu'on n'admette pour p & q que des nombres entiers.

Ce problème n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent; mais nous avons cru devoir le traiter en particulier, parce qu'il est susceptible d'une solution très-simple & très-élégante, & que d'ailleurs nous aurons dans la suite occasion d'en faire usage dans la résolution des équations du second degré à deux inconnues, en nombres entiers.

Suivant la méthode générale il faudra donc commencer par chercher les racines de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

lesquelles sont, comme l'on sait,

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est égal à un nombre carré, les deux racines seront commensurables, & il n'y aura point de *minimum* proprement dit, parce que la quantité $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ pourra devenir nulle.

2°. Si $B^2 - 4AC$ n'est pas carré, alors les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que $B^2 - 4AC$ sera $>$ ou $<$ 0, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à résoudre.

Premier Cas lorsque $B^2 - 4AC < 0$.

32. Les deux racines étant dans ce cas imaginaires, on aura $\frac{-B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra par conséquent être prise pour a . Ainsi il n'y aura qu'à réduire la fraction $\frac{-B}{2A}$, (en faisant abstraction du signe qu'elle peut avoir), en fraction continue par la méthode de l'art. 4, & en déduire ensuite la série des fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée; cela fait,

on essayera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, & pour q les dénominateurs correspondans, en ayant soin de donner à p & q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que $\frac{-B}{2A}$ sera un nombre positif ou négatif. On trouvera de cette maniere les valeurs de p & q , qui peuvent rendre la formule proposée un moindre.

E X E M P L E.

Soit proposée, par exemple, la quantité
 $49p^2 - 238pq + 290q^2$.

On aura donc ici $A=49$, $B=-238$,
 $C=290$; donc $B^2 - 4AC = 196$, & $\frac{-B}{2A}$
 $= \frac{238}{98} = \frac{17}{7}$. Opérant donc sur cette frac-
tion de la maniere enseignée dans l'art. 4,
on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide
desquels on formera ces fractions, (voyez
l'art. 20),

$$\frac{2}{6}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{17}{7}.$$

De sorte que les nombres à essayer seront
1, 2, 5, 17 pour p , & 0, 1, 2, 7 pour q ;

or désignant par P la quantité proposée,
on trouvera

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49;

d'où l'on voit que la plus petite valeur de P
est 5, laquelle résulte de ces suppositions
 $p=5$ & $q=2$; ainsi on peut conclure en
général que la formule proposée ne pourra
jamais devenir plus petite que 5, tant que
 p & q seront des nombres entiers; de sorte
que le *minimum* aura lieu, lorsque $p=5$
& $q=2$.

Second Cas lorsque $B^2 - 4AC > 0$.

33. Comme dans le cas présent l'équa-
tion $Ax^2 + Bx + C = 0$ a deux racines
réelles irrationnelles, il faudra les réduire
l'une & l'autre en fractions continues. Cette
opération peut se faire avec la plus grande
facilité par une méthode particulière que
nous avons exposée ailleurs, & que nous

croions devoir rapeler ici, d'autant qu'elle se déduit naturellement des formules de l'article 25, & qu'elle renferme d'ailleurs tous les principes nécessaires pour la solution complète & générale du problème proposé.

Dénouons donc par a la racine qu'on a dessein de convertir en fraction continue, & que nous supposons toujours positive, & soit en même temps b l'autre racine, on aura, comme l'on fait, $a + b = -\frac{B}{A}$, & $ab = \frac{C}{A}$; d'où $a - b = \frac{\sqrt{(B^2 - 4AC)}}{A}$,

ou bien en faisant, pour abrégier,

$$B^2 - 4AC = E,$$

$a - b = \frac{\sqrt{E}}{A}$, où le radical \sqrt{E} peut être positif ou négatif; il sera positif, lorsque la racine a sera la plus grande des deux, & négatif, lorsque cette racine sera la plus petite; donc

$$a = \frac{-B + \sqrt{E}}{2A}, \quad b = \frac{-B - \sqrt{E}}{2A}.$$

Maintenant, si on conserve les mêmes dénominations de l'art. 25, il n'y aura qu'à

substituer à la place de a la valeur précédente, & la difficulté ne consistera qu'à pouvoir déterminer facilement les valeurs entières approchées μ' , μ'' , μ''' , &c.

Pour faciliter ces déterminations, je multiplie le haut & le bas des fractions

$$\frac{p^0 - q^0}{aq^1 - p^1}, \frac{aq^1 - p^1}{p^1 - aq^1}, \frac{p^1 - aq^1}{aq^1 - p^1}, \&c. \text{ respectivement par } A(bq^1 - p^1), A(p^1 - bq^1), A(bq^1 - p^1), \&c. \& \text{ comme on a } A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0) = A$$

$$A(aq^1 - p^1)(bq^1 - p^1) = Ap^2 - A(a+b)p^1q^1 - Aabq^2 = Ap^2 + Bp^1q^1 + Cq^2,$$

$$A(p^1 - aq^1)(p^1 - bq^1) = Ap^2 - A(a+b)p^1q^1 - Aabq^2 = Ap^2 + Bp^1q^1 + Cq^2, \&c.$$

$$A(p^0 - aq^0)(bq^1 - p^1) = -\mu A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}\sqrt{E},$$

$$A(aq^1 - p^1)(p^1 - bq^1) = -Ap^1p^1 + Aap^1q^1 + Abp^1q^1 - Aabq^2 = -Ap^1p^1 - Cq^1q^1 - \frac{1}{2}B(p^1q^1 + q^1p^1) + \frac{1}{2}\sqrt{E}(p^1q^1 - q^1p^1),$$

$$A(p^1 - aq^1)(bq^1 - p^1) = -Ap^1p^1 + Aap^1p^1 + Abp^1q^1 - Aabq^1q^1 = -Ap^1p^1 - Cq^1q^1 - \frac{1}{2}B(p^1q^1 + q^1p^1) + \frac{1}{2}\sqrt{E}(p^1q^1 - q^1p^1),$$

& ainsi de suite, je fais, pour abrégier,

$$P^0 = A$$

$$P^1 = A p^1 + B p^1 q^1 + C q^1$$

$$P^{11} = A p^{11} + B p^{11} q^{11} + C q^{11}$$

$$P^{111} = A p^{111} + B p^{111} q^{111} + C q^{111}, \text{ \&c.}$$

$$Q^0 = \frac{1}{2} B$$

$$Q^1 = A \mu + \frac{1}{2} B$$

$$Q^{11} = A p^1 p^{11} + \frac{1}{2} B (p^1 q^{11} + q^1 p^{11}) + C q^1 q^{11}$$

$$Q^{111} = A p^{11} p^{111} + \frac{1}{2} B (p^{11} q^{111} + q^{11} p^{111}) + C q^{11} q^{111}, \text{ \&c.}$$

J'aurai, à cause de $p^1 q^1 - q^1 p^1 = 1$, $p^{11} q^{11} - q^{11} p^{11} = -1$, $p^{111} q^{111} - q^{111} p^{111} = 1$, &c. les formules suivantes,

$$\mu < \frac{-Q^0 + \frac{1}{2} \sqrt{E}}{P^0}$$

$$\mu^1 < \frac{-Q^1 + \frac{1}{2} \sqrt{E}}{P^1}$$

$$\mu^{11} < \frac{-Q^{11} + \frac{1}{2} \sqrt{E}}{P^{11}}$$

$$\mu^{111} < \frac{-Q^{111} + \frac{1}{2} \sqrt{E}}{P^{111}}, \text{ \&c.}$$

Or si dans l'expression de Q^{11} on met pour p^{11} & q^{11} leurs valeurs $\mu^1 p^1 + 1$ & μ^{11} , elle deviendra $\mu^1 P^1 + Q^1$; de même si on substitue dans l'expression de Q^{111} pour p^{111}

& q^{111} leurs valeurs $\mu^{11} p^{11} + p^{11}$, & $\mu^{111} q^{11} + q^{11}$, elle se changera en $\mu^{11} P^{11} + Q^{11}$, & ainsi du reste; de sorte que l'on aura

$$Q^1 = \mu P^0 + Q^0$$

$$Q^{11} = \mu^1 P^1 + Q^1$$

$$Q^{111} = \mu^{11} P^{11} + Q^{11}$$

$$Q^{1111} = \mu^{111} P^{111} + Q^{111}, \text{ \&c.}$$

Pareillement si on substitue dans l'expression de P^{11} les valeurs de p^{11} & q^{11} , elle deviendra $\mu^1 P^1 + 2\mu^1 Q^1 + A$; & si on substitue les valeurs de p^{111} & q^{111} dans l'expression de P^{111} , elle deviendra $\mu^{11} P^{11} + 2\mu^{11} Q^{11} + P^1$, & ainsi de suite; de sorte que l'on aura

$$P^1 = \mu^1 P^0 + 2\mu^1 Q^0 + C$$

$$P^{11} = \mu^1 P^1 + 2\mu^{11} Q^1 + P^0$$

$$P^{111} = \mu^{11} P^{11} + 2\mu^{111} Q^{11} + P^{11}$$

$$P^{1111} = \mu^{111} P^{111} + 2\mu^{1111} Q^{111} + P^{111}, \text{ \&c.}$$

Ainsi on pourra, à l'aide de ces formules, continuer aussi loin qu'on voudra les suites des nombres μ , μ^1 , μ^{11} , Q^0 , Q^1 , Q^{11} , & P^0 , P^1 , P^{11} , &c. qui dépendent, comme l'on voit, mutuellement les uns des

rifs de signes différens, & qu'alors tous les termes suivans seront aussi deux à deux de différens signes. Car on a, (art. précéd.), $P^0 = A(p^0 - aq^0)$, $P^1 = A(p^1 - aq^1)$, $P^2 = A(p^2 - aq^2)$, &c. or de ce qu'on a démontré dans le problème II, il s'en suit que les quantités $p^0 - aq^0$, $p^1 - aq^1$, $p^2 - aq^2$, &c. doivent être de signes alternatifs, & aller toujours en diminuant; donc, 1°. si b est une quantité négative, les quantités $p^0 - bq^0$, $p^1 - bq^1$, &c. seront toutes positives; par conséquent les nombres P^0 , P^1 , P^2 seront tous de signes alternatifs; 2°. si b est une quantité positive, comme les quantités $p^1 - aq^1$, $p^2 - aq^2$, &c. & à plus forte raison les quantités $\frac{P^1}{q^1} - a$, $\frac{P^2}{q^2} - a$, formeront une suite décroissante à l'infini, on arrivera nécessairement à une de ces dernières quantités, comme $\frac{P^m}{q^m} - a$, qui sera $< a - b$, (abstraction faite du signe), & alors toutes les suivantes, $\frac{P^{m+1}}{q^{m+1}} - a$, $\frac{P^{m+2}}{q^{m+2}} - a$,

le seront aussi; de sorte que toutes les quantités $a - b + \frac{P^m}{q^m} - a$, $a - b + \frac{P^{m+1}}{q^{m+1}} - a$, &c. seront nécessairement de même signe que la quantité $a - b$; par conséquent les quantités $\frac{P^m}{q^m} - b$, $\frac{P^{m+1}}{q^{m+1}} - b$, &c. & celles-ci, $p^{m+1} - bq^{m+1}$, $p^{m+2} - bq^{m+2}$, &c. à l'infini, seront toutes de même signe; donc les nombres P^m , P^{m+1} , &c. seront tous de signes alternatifs.

Supposons donc en général que l'on soit parvenu à des termes de signes alternatifs dans la série P^1 , P^2 , P^3 , &c. & que P^1 soit le premier de ces termes, en sorte que tous les termes, P^1 , P^2 , P^3 , &c. à l'infini, soient alternativement positifs & négatifs, je dis qu'aucun de ces termes ne pourra être plus grand que E . Car si, par exemple, P^m , P^{m+1} , P^{m+2} , &c. sont tous de signes alternatifs, il est clair que les produits deux à deux, $P^m P^{m+1}$, $P^{m+1} P^{m+2}$, &c. seront nécessairement tous négatifs; mais on a, (article précéd.) $Q^1 = P^1 P^2 = E$,

$Q^0 - P^0 P^1 - E$; &c. donc les nombres positifs, $-P^0 P^1$, $-P^1 P^2$, seront tous moindres que E , ou au moins pas plus grands que E ; de sorte que, comme les nombres P^0 , P^1 , P^2 , &c. sont d'ailleurs tous entiers par leur nature, les nombres P^0 , P^1 , &c. & en général les nombres P^0 , P^1 , &c. (abstraction faite de leurs signes), ne pourrout jamais surpasser le nombre E .

Il s'ensuit aussi de là que les termes Q^0 , Q^1 , &c. & en général Q^0 , Q^1 , &c. ne pourrout jamais être plus grands que \sqrt{E} .

D'où il est facile de conclure que les deux séries P^0 , P^1 , P^2 , &c. & Q^0 , Q^1 , &c. quoique poussées à l'infini, ne pourrout être composées que d'un certain nombre de termes différens, ces termes ne pouvant être pour la première que les nombres naturels jusqu'à E pris positivement ou négativement, & pour la seconde, les nombres naturels jusqu'à \sqrt{E} avec les fractions intermédiaires $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. pris aussi positivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précé-

dent que les nombres Q^0 , Q^1 , Q^2 , &c. seront toujours entiers, lorsque B sera pair; mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\frac{1}{2}$, lorsque B sera impair.

Donc, en continuant les deux séries P^0 , P^1 , P^2 , &c. & Q^0 , Q^1 , Q^2 , &c. il arrivera nécessairement que deux termes correspondans, comme P^0 & Q^0 , reviendront après un certain intervalle de termes, dont le nombre pourra toujours être supposé pair; car, comme il faut que les mêmes termes P^0 & Q^0 reviennent en même temps une infinité de fois, à cause que le nombre des termes différens dans l'une & dans l'autre série est limité, & par conséquent aussi le nombre de leurs combinaisons différens, il est clair que si ces deux termes revenoient toujours après un intervalle d'un nombre impair de termes, il n'y auroit qu'à considérer leurs retours alternativement, & alors les intervalles seroient tous composés d'un nombre pair de termes.

On aura donc, en dénotant par $2p$, le nombre des termes intermédiaires

$P^{p+2p} = P^p$, & $Q^{p+2p} = Q^p$,
& alors tous les termes P^p, P^{p+1}, P^{p+2} , &c.
 Q^p, Q^{p+1}, Q^{p+2} , &c. $\mu^p, \mu^{p+1}, \mu^{p+2}$, &c.
reviendront aussi au bout de chaque inter-
valle de $2p$ termes. Car il est facile de voir
par les formules données dans l'article pré-
cédent pour la détermination des nombres
 μ^1, μ^2, μ^3 , &c. Q^1, Q^2, Q^3 , &c. & $P^1,$
 P^2, P^3 , &c. que dès qu'on aura P^{p+2p}
 $= P^p$, & $Q^{p+2p} = Q^p$, on aura aussi μ^{p+2p}
 $= \mu^p$, ensuite $Q^{p+2p+1} = Q^{p+1}$ & P^{p+2p+1}
 $= P^{p+1}$, donc aussi $\mu^{p+2p+1} = \mu^{p+1}$, & ainsi
de suite.

Done, si π est un nombre quelconque
égal ou plus grand que π , & que m dé-
note un nombre quelconque entier positif,
on aura en général

$P^{\pi+2mp} = H^\pi$, $Q^{\pi+2mp} = Q^\pi$, $\mu^{\pi+2mp} = \mu^\pi$;
de sorte qu'en connoissant les $\pi+2p$ pre-
miers termes de chacune de ces trois suites,
on connoitra aussi tous les suivans, qui ne

seront autre chose que les $2p$ derniers ter-
mes répétés à l'infini dans le même ordre.

De tout cela il s'ensuit que pour trouver
la plus petite valeur de $P = Ap^2 + Bpq + Cq^2$,
il suffit de pousser les séries P^0, P^1, P^2 ,
&c. & Q^0, Q^1, Q^2 , &c. jusqu'à ce que
deux termes correspondans, comme P^p &
 Q^p reparoissent ensemble après un nombre
pair de termes intermédiaires, en sorte que
l'on ait $P^{p+2p} = P^p$, & $Q^{p+2p} = Q^p$; alors
le plus petit terme de la série P^0, P^1, P^2 ,
&c. P^{p+2p} sera le *minimum* cherché.

COROLLAIRE I.

35. Si le plus petit terme de la série $P^0,$
 P^1, P^2 , &c. P^{p+2p} ne se trouve pas avant
le terme P^p , alors ce terme reparoitra une
infinité de fois dans la même suite prolon-
gée à l'infini; ainsi il y aura alors une infi-
nité de valeurs de p & de q qui répondront
au *minimum*, & qu'on pourra trouver tou-
tes par les formules de l'art. 25, en con-
tinuant la série des nombres μ^1, μ^2, μ^3 , &c.
au-delà du terme $\mu^{2p+\pi}$ par la répétition des

mêmes termes μ^{x+1} , μ^{x+2} , &c. comme on l'a dit plus haut.

On peut aussi dans ce cas avoir des formules générales qui représentent toutes les valeurs de p & de q dont il s'agit ; mais le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir, nous meneroit trop loin ; quant à présent, nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux *Mémoires de Berlin* déjà cités, an. 1768, pag. 123 & suiv. où l'on trouvera une théorie générale & nouvelle des fractions continues périodiques.

COROLLAIRE II.

36. Nous avons démontré dans l'art. 34, qu'en continuant la série P^i , P^u , P^m &c. on doit trouver des termes consécutifs de signes différens. Supposons donc, par ex. que P^m & P^u soient les deux premiers termes de cette qualité, on aura nécessairement les deux quantités $p^m - bq^m$ & $p^u - bq^u$ de mêmes signes, à cause que les quantités $p^m - aq^m$ & $p^u - aq^u$ sont de leur

nature de différens signes. Or en mettant dans les quantités $p^u - bq^u$, $p^m - bq^m$, &c. les valeurs de p^u , p^m , &c. q^u , q^m , &c. (art. 25), on aura

$p^u - bq^u = \mu^u (p^m - bq^m) + p^{u-1} - bq^{u-1}$
 $p^m - bq^m = \mu^m (p^{u-1} - bq^{u-1}) + p^{u-2} - bq^{u-2}$ &c.
 D'où, à cause que μ^u , μ^m , &c. sont des nombres positifs, il est clair que toutes les quantités $p^u - bq^u$, $p^m - bq^m$, &c. à l'infini, seront de mêmes signes que les quantités $p^m - bq^m$ & $p^u - bq^u$; par conséquent tous les termes P^m , P^u , P^v , &c. à l'infini, auront alternativement les signes *plus* & *moins*.

Maintenant on aura par les équations précédentes

$$\begin{aligned}\mu^u &= \frac{p^u - bq^u}{p^m - bq^m} - \frac{p^{u-1} - bq^{u-1}}{p^m - bq^m} \\ \mu^m &= \frac{p^m - bq^m}{p^u - bq^u} - \frac{p^{u-1} - bq^{u-1}}{p^u - bq^u} \\ \mu^v &= \frac{p^{u-1} - bq^{u-1}}{p^m - bq^m} - \frac{p^{u-2} - bq^{u-2}}{p^m - bq^m}, \text{ \&c.}\end{aligned}$$

où les quantités $\frac{p^{u-1} - bq^{u-1}}{p^m - bq^m}$, $\frac{p^{u-2} - bq^{u-2}}{p^m - bq^m}$, &c. seront toutes positives.

Donc, puisque les nombres μ'' , μ' , μ'' , &c. doivent être tous entiers positifs, (*hyp.*) la quantité $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$ devra être positive & > 1 , de même que les quantités $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, &c. donc les quantités $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, &c. seront positives & moindres que l'unité; de sorte que les nombres μ'' , μ' , &c. ne pourront être que les nombres entiers, qui sont immédiatement moindres que les valeurs de $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, &c. quant au nombre μ'' , il sera aussi égal au nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, toutes les fois qu'on aura $\frac{p''-bq''}{p''-bq''} < 1$. Ainsi on aura

$$\mu'' < \frac{p''-bq''}{p''-bq''}, \text{ si } \frac{p''-bq''}{p''-bq''} < 1,$$

$$\mu' < \frac{p''-bq''}{p''-bq''},$$

$$\mu'' < \frac{p''-bq''}{p''-bq''}, \text{ \&c.}$$

le signe $<$ placé après les nombres μ'' , μ' , &c. dénotant, comme plus haut, les nombres entiers qui sont immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même signe.

Or il est facile de transformer, par des réductions semblables à celles de l'art. 33, les quantités $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, $\frac{p''-bq''}{p''-bq''}$, &c. en celles-ci, $\frac{Q''+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p''}$, $\frac{Q''-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p''}$ &c. de plus la condition de $\frac{p''-bq''}{p''-bq''} < 1$ peut se réduire à celle-ci $\frac{p''-bq''}{p''-bq''} < \frac{a q''-p''}{p''-a q''}$; laquelle, à cause de $\frac{a q''-p''}{p''-a q''} > 1$, aura sûrement lieu lorsqu'on aura $\frac{p''-bq''}{p''-bq''} =$ ou

$$< 1; \text{ donc on aura}$$

$$\mu'' < \frac{Q''+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p''}, \text{ si } \frac{p''-bq''}{p''-bq''} = \text{ ou } < 1,$$

$$\mu' < \frac{Q''-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p''},$$

$$\mu'' < \frac{Q''+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{p''}, \text{ \&c.}$$

En combinant ces formules avec celles de l'art. 33, qui renferment la loi des séries P^i , P^u , P^m , &c. & Q^i , Q^u , Q^m , &c. on verra aisément que si on suppose donnés deux termes correspondans de ces deux séries, dont le numéro soit plus grand que 3, on pourra remonter aux termes précédens jusqu'à P^{iv} & Q^v , & même jusqu'aux termes P^{iii} & Q^v , si la condition de $\frac{-P^{iii}}{P^{iv}}$ = ou < 1 a lieu; en sorte que tous ces termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés.

En effet connoissant, par exemple, P^{ii} & Q^v , on connoitra d'abord P^v par l'équation $Q^v - P^v P^{ii} = \frac{1}{4} E$; ensuite ayant Q^v & P^v , on trouvera la valeur de μ^v , à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de Q^v par l'équation $Q^v = \mu^v P^v + Q^v$; or l'équation $Q^v - P^{iv} P^v = \frac{1}{4} E$ donnera P^{iv} ; & si on fait d'avance que $\frac{-P^{iii}}{P^{iv}}$ doit être = ou < 1 , on trouvera μ^v , après quoi

on aura Q^{iv} par l'équation $Q^{iv} = \mu^{iv} P^{iv} + Q^{iv}$, & ensuite P^{iii} par celle-ci, $Q^{iv} - P^{iii} P^{iv} = \frac{1}{4} E$.

De-là il est facile de tirer cette conclusion générale; que si P^{λ} & $P^{\lambda+1}$ sont les premiers termes de la série P^i , P^u , P^m , &c. qui se trouvent consécutivement de différens signes, le terme $P^{\lambda+1}$ & les suivans reviendront toujours après un certain nombre de termes intermédiaires, & qu'il en sera de même du terme P^{λ} , si l'on a $\frac{+P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}$ = ou < 1 .

Car imaginons, comme dans l'art. 34, que l'on ait trouvé $P^{\pi+2\lambda} = P^{\pi}$, & $Q^{\pi+2\lambda} = Q^{\pi}$, & supposons que π soit $> \lambda$, c'est-à-dire $\pi = \lambda + \nu$; donc on pourra d'un côté remonter du terme P^{π} au terme $P^{\lambda+1}$ ou P^{λ} , & de l'autre, du terme $P^{\pi+2\lambda}$ au terme $P^{\lambda+2\lambda+1}$ ou $P^{\lambda+2\lambda}$; & comme les termes d'où l'on part, de part & d'autre sont égaux, tous les dérivés seront aussi respectivement égaux; de sorte qu'on aura $P^{\lambda+2\lambda+1} = P^{\lambda+1}$, ou même $P^{\lambda+2\lambda} = P^{\lambda}$, si $\frac{+P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}$ = ou < 1 .

Par-là on pourra donc juger d'avance du commencement des périodes dans la série $P^0, P^1, P^2, P^3, \&c.$ & par conséquent aussi dans les deux autres séries, $Q^0, Q^1, Q^2, Q^3, \&c.$ & $\mu, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \&c.$ mais quant à la longueur des périodes, cela dépend de la nature du nombre E , & même uniquement de la valeur de ce nombre, comme je pourrais le démontrer, si je ne craignois que ce détail ne me menât trop loin.

COROLLAIRE III.

37. Ce qu'on vient de démontrer dans le corol. préc. peut servir encore à prouver ce beau théorème: *Que toute équation de la forme $p^2 - Kq^2 = 1$, où K est un nombre entier positif non carré, & p & q deux indéterminées, est toujours résoluble en nombres entiers.*

Car, en comparant la formule $p^2 - Kq^2$ avec la formule générale $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, on a $A=1, B=0, C=-K$; donc $E = B^2 - 4AC = 4K$, & $\frac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}$,

(art. 33). Donc $P^0=1, Q^0=0$; donc $\mu < \sqrt{K}$, $Q^1=\mu$, & $P^1=\mu^2-K$; d'où l'on voit 1°. que P^1 est négatif, & par conséquent de signe différent de P^0 ; 2°. que $-P^1$ est $=$ ou > 1 , parce que K & μ sont des nombres entiers; de sorte qu'on aura $\frac{P^0}{-P^1} =$ ou < 1 ; donc on aura, (art. préc.) $\lambda=0$, & $P^2=P^0=1$; de sorte qu'en continuant la série $P^0, P^1, P^2, \&c.$ le terme $P^2=1$ reviendra nécessairement après un certain intervalle de termes; par conséquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p & de q qui rendent la formule $p^2 - Kq^2$ égale à l'unité.

COROLLAIRE IV.

38. On peut aussi démontrer cet autre théorème: *Que si l'équation $p^2 - Kq^2 = +H$ est résoluble en nombres entiers, en supposant K un nombre positif non-carré, & H un nombre positif & moindre que \sqrt{K} , les nombres p & q doivent être tels que $\frac{p}{q}$ soit une des fractions principales convergentes vers la valeur de \sqrt{K} .*

Supposons que le signe supérieur doive avoir lieu, en sorte que $p - \sqrt{K}q = H$; donc, on aura $p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p + q\sqrt{K}}$ & $\frac{p}{q}$

$-\sqrt{K} = \frac{H}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K})}$; qu'on cherche deux nombres entiers positifs, r & f , moindres que p & q , & tels que $pf - qr = 1$, ce qui est toujours possible, comme on l'a démontré dans l'art. 23, & l'on aura $\frac{p}{q} = \frac{r}{f}$; donc retranchant cette équation de la précédente, il viendra $\frac{H}{f} = \sqrt{K}$

$$= \frac{H}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K}) - 1};$$

de sorte qu'on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K})}$$

$$r - f\sqrt{K} = \frac{1}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K}) - 1}.$$

Or, comme $\frac{p}{q} > \sqrt{K}$ & $H < \sqrt{K}$, il est

clair que $\frac{H}{\frac{p}{q} + \sqrt{K}}$ sera $< \frac{1}{2}$; donc $p - q$

\sqrt{K} sera $> \frac{1}{2}$; donc $\frac{fH}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K})}$ sera >

plus

plus forte raison $< \frac{1}{2}$, puisque $f < q$; de sorte que $r - f\sqrt{K}$ sera une quantité négative, laquelle, prise positivement, sera

$$> \frac{1}{2}, \text{ à cause de } 1 - \frac{fH}{q(\frac{p}{q} + \sqrt{K})} > \frac{1}{2}.$$

Ainsi on aura les deux quantités $p - q\sqrt{K}$ & $r - f\sqrt{K}$, ou bien, en faisant $a = \sqrt{K}$, $p - aq$ & $r - af$, lesquelles seront assujetties aux mêmes conditions que nous avons supposées dans l'art. 24, & d'où l'on tirera des conclusions semblables; donc &c. (art. 26), si l'on avoit $p - Kq = -H$, alors il faudroit chercher les nombres r & f , tels que $pf - qr = -1$, & l'on auroit ces deux équations

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q})}$$

$$f\sqrt{K} - r = \frac{1}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q}) - 1}.$$

Comme $H < \sqrt{K}$ & $f < q$, il est clair que

$\frac{fH}{q(\sqrt{K} + \frac{p}{q})}$ sera < 1 ; de sorte que la

quantité $f\sqrt{K} - r$ sera négative; or je dis

Tome II.

li

que cette quantité, prise positivement, sera plus grande que $q\sqrt{K-p}$; pour cela il faut démontrer que $\frac{1}{q}\left(1 - \frac{fH}{q(\sqrt{K+\frac{p}{q}})}\right)$

$> \frac{H}{q(\sqrt{K+\frac{p}{q}})}$, ou bien que $1 > \frac{H(1+\frac{p}{q})}{\sqrt{K+\frac{p}{q}}}$, savoir $\sqrt{K+\frac{p}{q}} > H + \frac{fH}{q}$; mais $H < \sqrt{K}$, (*hyp.*); donc il suffit de prouver que $\frac{f}{q} > \frac{\sqrt{K}}{q}$, ou bien que $p > f\sqrt{K}$; c'est ce qui est évident, à cause que la quantité $f\sqrt{K} - r$ étant négative, il faut que $r > f\sqrt{K}$, & à plus forte raison $p > f\sqrt{K}$, puisque $p > r$.

Ainsi les deux quantités, $p - q\sqrt{K}$ & $r - f\sqrt{K}$, seront de différens signes, & la seconde sera plus grande que la première, (abstraction faite des signes), comme dans le cas précédent; donc, &c.

Donc, lorsqu'on aura à résoudre en nombres entiers une équation de la forme $p^2 - Kq^2 = \pm H$, ou $H < \sqrt{K}$, il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'art. 33, en faisant $A=1$, $B=0$ & $C=-K$; &c.

si dans la série P^0, P^1, P^2, P^3 &c. P^{r+n} , on rencontre un terme $= \pm H$, on aura la résolution cherchée, sinon on sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE.

39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33 qu'une des racines de l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$, que nous avons supposé positive; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour a , & faire la même opération sur l'une que sur l'autre; mais si l'une des deux racines ou toutes deux étoient négatives, alors on les changeroit d'abord en positives, en changeant seulement le signe de B , & on opéreroit comme ci-dessus; mais ensuite il faudroit prendre les valeurs de p & de q avec des signes différens, c'est-à-dire l'une positivement & l'autre négativement, (art. 29).

Donc en général on donnera à la valeur de B le signe ambigu \pm , de même qu'à

\sqrt{E} , c'est-à-dire qu'on fera $Q^* = \mp \frac{1}{2} B$, & qu'on mettra \pm à la place de \sqrt{E} , & il faudra prendre ces signes, en sorte que la racine

$$a = \frac{\mp \frac{1}{2} B \pm \frac{1}{2} \sqrt{E}}{A}$$

soit positive, ce qui pourra toujours se faire de deux manières différentes; le signe supérieur de B indiquera une racine positive, auquel cas il faudra prendre p & q tous deux de mêmes signes; au contraire le signe inférieur de B indiquera une racine négative, auquel cas les valeurs de p & q devront être prises de signes différens.

E X E M P L E.

40. On demande quels nombres entiers il faudroit prendre pour p & q , afin que la quantité

$9p^2 - 118pq + 378q^2$
deviend la plus petite qu'il est possible.

Comparant cette quantité avec la formule générale du problème III, on aura $A=9$, $B=-118$, $C=378$, dont $B^* = -44C=316$; d'où l'on voit que ce cas

se rapporte à celui de l'art. 33. On fera donc $E=316$ & $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$, où l'on remarquera d'abord que $\sqrt{79} > 8$ & < 9 ; de sorte que dans les formules dont il ne s'agira que d'avoir la valeur entière approchée, on pourra prendre sur le champ à la place du radical $\sqrt{79}$ le nombre 8 ou 9, suivant que ce radical se trouvera ajouté ou retranché des autres nombres de la même formule.

Maintenant on donnera tant à B qu'à \sqrt{E} le signe ambigu \pm , & on prendra ensuite ces signes tels que

$$a = \frac{\pm 59 \pm \sqrt{79}}{9}$$

soit une quantité positive, (art. 39); d'où l'on voit qu'il faut toujours prendre le signe supérieur pour le nombre 59, & que pour le radical $\sqrt{79}$ on peut prendre également le supérieur & l'inférieur. Ainsi on fera toujours $Q^* = -\frac{1}{2}B$, & \sqrt{E} pourra être pris successivement en plus & en moins.

Soit donc 1^o . $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$ avec le signe positif, on fera, (art. 33), le calcul suivant:

$$\begin{array}{l}
 Q^0 = -59, \quad P^0 = 9, \quad \mu^0 < \frac{19+79}{9} = 7, \\
 Q^1 = 9, 7, -59 = 4, \quad P^1 = \frac{16-79}{9} = -7, \quad \mu^1 < \frac{-4+79}{-7} = 1, \\
 Q^2 = -7, 1, 4 = -3, \quad P^2 = \frac{9-79}{-7} = 10, \quad \mu^2 < \frac{3+79}{10} = 1, \\
 Q^3 = 10, 1, -3 = 7, \quad P^3 = \frac{49-79}{-7} = -3, \quad \mu^3 < \frac{-7+79}{-3} = 5, \\
 Q^4 = -3, 5, 7 = -8, \quad P^4 = \frac{64-79}{-3} = 5, \quad \mu^4 < \frac{8+79}{-3} = 3, \\
 Q^5 = 5, 3, -8 = 7, \quad P^5 = \frac{49-79}{-3} = 6, \quad \mu^5 < \frac{-7+79}{-6} = 2, \\
 Q^6 = -6, 2, 7 = -5, \quad P^6 = \frac{35-79}{-6} = 9, \quad \mu^6 < \frac{5+79}{-6} = 1, \\
 Q^7 = 9, 1, -5 = 4, \quad P^7 = \frac{16-79}{9} = -7, \quad \mu^7 < \frac{-4+79}{9} = 1, \\
 \&c. \&c. \&c.
 \end{array}$$

Je m'arrête ici, parce que je vois que $Q^{vi} = Q^i$, & $P^{vi} = P^i$, & que la différence entre les deux numéros 1 & 7 est paire; d'où il s'ensuit que tous les termes suivans seront aussi les mêmes que les précédens; ainsi on aura $Q^{vii} = 4$, $Q^{viii} = -3$, $Q^x = 7$, &c. $P^{vii} = -7$, $P^{viii} = 10$, &c. de sorte qu'on pourra, si l'on veut, continuer les séries ci-dessus à l'infini, en ne faisant que répéter les mêmes termes.

2°. Prenons maintenant le radical $\sqrt{79}$ avec un signe négatif, & le calcul sera comme il suit :

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{C}^0 = -59, & P^0 = 9, & \mu < \frac{59+179}{13} = 5, \\
\mathcal{C}^1 = 9, 5-59 = -14, & P^1 = \frac{166-179}{9} = 3, & \mu^1 < \frac{14+179}{13} = 1, \\
\mathcal{C}^{11} = 3, 1-14 = -11, & P^{11} = \frac{11}{9} = -6, & \mu^{11} < \frac{1-179}{13} = 1, \\
\mathcal{C}^{111} = -6, 1-11 = -7, & P^{111} = \frac{45-179}{-6} = 5, & \mu^{111} < \frac{7+179}{13} = 3, \\
\mathcal{C}^{112} = 5, 3-7 = -8, & P^{112} = \frac{64-179}{-8} = -3, & \mu^{112} < \frac{5+179}{-3} = 5, \\
\mathcal{C}^{12} = -3, 5+8 = -7, & P^{12} = \frac{49-179}{-3} = 10, & \mu^{12} < \frac{7+179}{10} = 1, \\
\mathcal{C}^{121} = 10, 1-7 = -3, & P^{121} = \frac{9-179}{-3} = 7, & \mu^{121} < \frac{1+179}{7} = 1, \\
\mathcal{C}^{122} = -7, 1+3 = 4, & P^{122} = \frac{16-179}{-7} = 9, & \mu^{122} < \frac{4+179}{9} = 1, \\
\mathcal{C}^{123} = 9, 1-4 = 5, & P^{123} = \frac{35-179}{-6} = -6, & \mu^{123} < \frac{5+179}{-6} = 2, \\
\mathcal{C}^{124} = -6, 2+5 = -7, & P^{124} = \frac{-49-179}{-6} = 5, & \mu^{124} < \frac{7+179}{5} = 3,
\end{array}$$

On peut s'arrêter ici, puisque l'on a trouvé $Q^{12}=Q^{11}$ & $P^{12}=P^{11}$, & que la différence des numéros 9 & 3 est paire;

Car en continuant les séries on ne retrouveroit plus que les mêmes termes qu'on a déjà trouvés.

Or si on considère les valeurs des termes $P^0, P^1, P^{11}, P^{111}, \&c.$ trouvées dans les deux cas, on verra que le plus petit de ces termes est égal à -3 ; dans le premier cas c'est le terme P^{111} auquel répondent les valeurs p^{111} & q^{111} ; & dans le second cas, c'est le terme P^{1V} auquel répondent les valeurs p^{1V} & q^{1V} .

D'où il s'enfuit que la plus petite valeur que puisse recevoir la quantité proposée est -3 ; & pour avoir les valeurs de p & q qui y répondent , on prendra dans le premier cas les nombres μ , μ^1 , μ^2 , savoir 7 , 1 & 1 , & l'on en formera les fractions principales convergentes $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{11}{2}$; la troisième fraction sera donc $\frac{p^{11}}{q^{11}}$, en sorte que l'on

aura $p'''=1$ & $q'''=2$; c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront $p=1$ & $q=2$. Dans le second cas on prendra les nombres μ, μ', μ'', μ''' , savoir 5, 1, 1, 3,

lesquels donneront ces fractions $\frac{1}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{32}{7}$; de sorte qu'on aura $p^{iv}=39$ & $q^{iv}=7$; donc $p=39$ & $q=7$.

Les valeurs qu'on vient de trouver pour p & q dans le cas du *minimum*, sont aussi les plus petites qu'il est possible; mais on pourra, si l'on veut, en trouver successivement d'autres plus grandes; car il est clair que le même terme -3 reviendra toujours au bout de chaque intervalle de six termes; de sorte que dans le premier cas on aura $p^{iii}=-3$, $p^{ix}=-3$, $p^{xv}=-3$, &c. & dans le second, $p^{iv}=-3$, $p^{x}=-3$, $p^{xvi}=-3$, &c. Donc dans le premier cas on aura pour les valeurs satisfaisantes de p & q celles-ci, p^{iii} , q^{iii} , p^{ix} , q^{ix} , p^{xv} , q^{xv} , &c. & dans le second cas celles-ci, p^{iv} , q^{iv} , p^{x} , q^{x} , p^{xvi} , q^{xvi} , &c. Or les valeurs de μ , μ' , μ'' , &c. sont dans le premier cas 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 5, 3, &c. à l'infini, parce que $\mu^{xiii}=\mu'$ & $\mu^{xviii}=\mu''$, &c. ainsi il n'y aura qu'à former par la méthode de l'art. 20 les fractions

7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5,
 $\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}, \frac{83}{11}, \frac{264}{35}, \frac{611}{81}, \frac{875}{116}, \frac{1486}{197}, \frac{2461}{311}, \frac{33291}{1762}$,
 &c.

& on pourra prendre pour p les numérateurs de la troisième, de la neuvième, &c. & pour q les dénominateurs correspondans; on aura donc $p=15$, $q=2$, ou $p=2361$, $q=313$ ou, &c.

Dans le second cas les valeurs de μ' , μ'' , μ^{xiii} , &c. seront 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, &c. parce que $\mu^{xvi}=\mu^{xiii}$, $\mu^{xv}=\mu^{xii}$, &c. On formera donc ces fractions-ci,

5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3,
 $\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{245}{44}, \frac{415}{81}, \frac{696}{125}, \frac{1845}{331}, \frac{6225}{1118}$,
 5,
 $\frac{32968}{5921}$, &c.

& les fractions quatrième, dixième, &c. donneront les valeurs de p & q , lesquelles seront donc $p=39$, $q=7$, ou $p=6225$, $q=1118$, &c.

De cette manière on pourra donc trouver par ordre toutes les valeurs de p & q ,

qui rendront la formule proposée $= -3$; valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourroit même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p & de q ; on la trouvera, si l'on en est curieux, par la méthode que nous avons exposée ailleurs, & dont nous avons parlé plus haut, (art. 35).

Nous venons de trouver que le minimum de la quantité proposée est -3 , & par conséquent négatif; or on pourroit proposer de trouver la plus petite valeur positive que la même quantité puisse recevoir, alors il n'y auroit qu'à examiner les séries $P^0, P^1, P^{II}, P^{III}$, &c. dans les deux cas, & on verroit que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas; & comme dans le premier cas c'est P^{IV} , & dans le second P^{III} qui est $=5$, les valeurs de p & de q , qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée, seront p^{IV}, q^{IV} , ou p^8, q^8 , ou &c. dans le premier cas, & p^{III}, q^{III} , ou p^{18}, q^{18} &c. dans le second; de sorte que l'on aura par les frac-

tions ci-dessus $p=83, q=11$, ou $p=13291, q=1762$ &c. ou $p=11, q=2, p=1843, q=331$ &c.

Au reste on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres $\mu, \mu', \mu'',$ &c. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues, qui représentent les deux racines de l'équation

$$9x^2 - 118x + 378 = 0.$$

De sorte que ces racines seront

$$7 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} +, \text{ \&c.}$$

$$5 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} +, \text{ \&c.}$$

expressions qu'on pourra continuer à l'infini par la simple répétition des mêmes nombres.

Ainsi on voit par-là comment on doit s'y prendre pour réduire en fractions continues les racines de toute équation du second degré.

S C O L I E.

41. M. Euler a donné dans le tome XI des nouveaux Commentaires de Pétersbourg une méthode analogue à la précédente, quoique déduite de principes un peu différens, pour réduire en fraction continue la racine d'un nombre quelconque entier non-carré, & il y a joint une table où les fractions continues sont calculées pour tous les nombres naturels non-carrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile en différentes occasions, & sur-tout pour la solution des problemes indéterminés du second degré, comme on le verra plus bas, (§. VII.), nous croyons faire plaisir à nos Lecteurs de la leur présenter ici; on remarquera qu'à chaque nombre radical il répond deux suites de nombres entiers; la supérieure est celle des nombres P^o , $-P^i$, P^{ii} , $-P^{iii}$, &c. & l'inférieure est celle des nombres μ , μ' , μ'' , μ''' , &c.

✓2	1 1 1 1 &c.
	1 2 2 2 &c.
✓3	1 2 1 2 1 2 1 &c.
	1 1 2 1 2 1 2 &c.
✓5	1 1 1 1 &c.
	2 4 4 4 &c.
✓6	1 2 1 2 1 2 1 &c.
	2 2 4 2 4 2 4 &c.
✓7	1 3 2 3 1 3 2 3 1 &c.
	2 1 1 1 4 1 1 1 4 &c.
✓8	1 4 1 4 1 4 1 &c.
	2 1 4 1 4 1 4 &c.
✓10	1 1 1 1 &c.
	3 6 6 6 &c.
✓11	1 2 1 2 1 2 1 &c.
	3 3 6 3 6 3 6 &c.
✓12	1 3 1 3 1 3 1 &c.
	3 2 6 2 6 2 6 &c.
✓13	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 &c.
	3 1 1 1 6 1 1 1 6 &c.
✓14	1 5 2 5 1 5 2 5 1 &c.
	3 1 2 1 6 1 2 1 6 &c.
✓15	1 6 1 6 1 6 1 &c.
	3 1 6 1 6 1 6 &c.
✓17	1 1 1 1 &c.
	4 8 8 8 &c.
✓18	1 2 1 2 1 2 1 2 1 &c.
	4 4 8 4 8 4 8 &c.
✓19	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 &c.
	4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 &c.
✓20	1 4 1 4 1 4 1 4 1 &c.
	4 2 8 2 8 2 8 2 8 &c.
✓21	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 &c.
	4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 &c.
✓22	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 &c.
	4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 &c.

✓23	172717271 6c. 413181318 6c.
✓24	1818181 6c. 4181818 6c.
✓26	1111 1 6c. 5101010 6c.
✓27	1212121 6c. 5510510510 6c.
✓28	134313431 6c. 53231032310 6c.
✓29	14554145541 6c. 5211210211210 6c.
✓30	151515151 6c. 5210210210210 6c.
✓31	16532356165 6c. 5115531110112 6c.
✓32	174717471 6c. 51111011110 6c.
✓33	183818381 6c. 51211012110 6c.
✓34	192919291 6c. 51411014110 6c.
✓35	110110110110 6c. 5110110110110 6c.
✓37	11111 6c. 612121212 6c.
✓38	12121212 6c. 66121612612 6c.
✓39	13131313 6c. 6412412412 6c.
✓40	14141414 6c. 6312312312 6c.
✓41	1551551 6c. 622122212 6c.
✓42	1616161 6c. 6212212212 6c.

✓43

✓43	1763929367176 6c. 6113151311211 6c.
✓44	18574758185 6c. 611121111211 6c.
✓45	194549194549194 6c. 61222112122211212 6c.
✓46	110376525673101103 6c. 61311262113112113 6c.
✓47	1112111112111 6c. 61511215112 6c.
✓48	112112112 6c. 61121121 6c.
✓50	1111 6c. 7141414 6c.
✓51	121212 6c. 77147147 6c.
✓52	13949313949313 6c. 7412141412114 6c.
✓53	1477414774147 6c. 731131431131431 6c.
✓54	15929515929515 6c. 7216121421612142 6c.
✓55	1656116561 6c. 728214222142 6c.
✓56	1717171 6c. 7214214214 6c.
✓57	187378187 6c. 7114111411 6c.
✓58	1967769196 6c. 71111111411 6c.
✓59	110525101105 6c. 71272114112 6c.
✓60	111411114 6c. 712114112 6c.
✓61	1123495943121123 6c. 714312213411414 6c.

Tome II.

K. k

✓62	1 13 2 13 1 13 2 &c. 7 16 1 14 1 6 &c.
✓63	1 14 1 14 1 14 &c. 7 1 14 1 14 1 &c.
✓65	1 1 1 1 &c. 9 16 16 16 &c.
✓66	1 2 1 2 1 &c. 8 8 16 8 16 &c.
✓67	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 &c. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 &c.
✓68	1 4 1 4 1 4 &c. 8 4 16 4 16 4 &c.
✓69	1 5 4 1 3 11 4 5 1 5 4 &c. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 &c.
✓70	1 6 9 5 9 6 1 6 9 &c. 8 2 1 2 1 2 16 2 1 &c.
✓71	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 &c. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 &c.
✓72	1 8 1 8 1 8 &c. 8 2 16 2 16 2 &c.
✓73	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 &c. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 &c.
✓74	1 10 7 7 10 1 10 7 &c. 8 1 1 1 1 16 1 1 &c.
✓75	1 11 6 11 11 6 &c. 8 1 1 1 16 1 1 &c.
✓76	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 &c. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 2 1 16 1 2 &c.
✓77	1 13 4 7 4 13 1 13 4 &c. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 &c.
✓78	1 14 3 14 1 14 3 &c. 8 1 4 1 16 1 4 &c.
✓79	1 15 2 15 1 15 2 &c. 8 1 7 1 16 1 7 &c.
✓80	1 16 1 16 1 16 &c. 8 1 16 1 16 1 &c.

✓82	1 1 1 1 &c. 9 18 18 18 &c.
✓83	1 2 1 2 1 2 &c. 9 9 18 9 18 9 &c.
✓84	3 3 1 3 1 3 &c. 9 6 18 6 18 6 &c.
✓85	1 4 9 9 4 1 4 9 &c. 9 4 1 1 4 18 4 1 &c.
✓86	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 &c. 9 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 3 1 &c.
✓87	1 6 1 6 1 6 &c. 9 3 18 3 18 3 &c.
✓88	1 7 9 8 9 7 1 7 9 &c. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 &c.
✓89	1 8 5 5 8 1 8 5 &c. 9 2 3 3 2 18 2 3 &c.
✓90	1 9 1 9 1 &c. 9 2 18 2 18 &c.
✓91	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 &c. 9 1 5 1 5 1 18 1 1 &c.
✓92	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 &c. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 &c.
✓93	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 &c. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 18 1 1 &c.
✓94	1 13 6 9 10 3 15 2 15 3 10 9 13 1 &c. 9 1 2 3 1 1 5 18 1 5 1 13 2 1 18 &c.
✓95	1 14 5 14 1 14 &c. 9 1 2 1 18 1 &c.
✓96	1 15 4 15 1 15 &c. 9 1 3 1 18 1 &c.
✓97	1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1 16 &c. 9 1 5 1 1 1 1 1 5 1 18 1 &c.
✓98	1 17 2 17 1 17 &c. 9 1 8 1 18 1 &c.
✓99	1 18 1 18 1 &c. 9 1 18 1 18 &c.

Ainsi on aura, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +, \text{ \&c.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +, \text{ \&c.}$$

\&c ainsi des autres.

Et si on forme les fractions convergentes

$\frac{p^0}{q^0}, \frac{p^1}{q^1}, \frac{p^2}{q^2}, \frac{p^3}{q^3}, \text{ \&c.}$ d'après chacune de ces fractions continues on aura

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1, p^1 - 2q^1 = -1,$$

$$p^2 - 2q^2 = 1, \text{ \&c.}$$

\&c de même,

$$(p^0)^2 - 3(q^0)^2 = 1, p^1 - 3q^1 = -2,$$

$$p^2 - 3q^2 = 1, \text{ \&c. \&c.}$$



PARAGRAPHE III.

Sur la résolution des Equations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers.

Addition pour le Chapitre I.

42. **L**ORSQU'ON a à résoudre une équation de cette forme

$$ax - by = c,$$

où a, b, c sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, \&c où les deux inconnues x \& y doivent être aussi des nombres entiers, il suffit de connoître une seule solution, pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres solutions possibles.

En effet, supposons que l'on sache que ces valeurs, $x = a$ \& $y = \beta$, satisfont à l'équation proposée, a \& β étant des nombres entiers quelconques, on aura donc $a\alpha - b\beta = c$, \& par conséquent $ax - by = a\alpha - b\beta$, ou bien $a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0$; d'où l'on tire

$$\frac{x - \alpha}{y - \beta} = \frac{b}{a}.$$

K k iij

Qu'on réduise la fraction $\frac{b}{a}$ à ses moindres termes, & supposant qu'elle se change par-là en celle-ci, $\frac{b'}{a'}$, où b' & a' seront premiers entr'eux, il est visible que l'équation $\frac{x-a}{y-\beta} = \frac{b'}{a'}$ ne sauroit subsister, dans la supposition que $x-a$ & $y-\beta$ soient des nombres entiers, à moins que l'on ait $x-a=mb'$, & $y-\beta=ma'$, m étant un nombre quelconque entier; de sorte que l'on aura en général $x=a+mb'$, & $y=\beta+ma'$, m étant un nombre entier indéterminé.

Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il est facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m , en sorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que $\frac{b'}{2}$, ou que celle de y ne soit pas plus grande que $\frac{a'}{2}$, (abstraction faite des signes de ces quantités); d'où il s'ensuit que si l'équation proposée, $ax-by=c$,

est résoluble en nombres entiers, & qu'on y substitue successivement à la place de x tous les nombres entiers tant positifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites $\frac{b'}{2}$ & $\frac{-b'}{2}$, on en trouvera nécessairement un qui satisfera à cette équation; & on trouvera de même une valeur satisfaisante de y parmi les nombres entiers positifs ou négatifs, contenus entre les limites $\frac{a'}{2}$ & $\frac{-a'}{2}$.

Ainsi on pourra par ce moyen trouver une première solution de la proposée, après quoi on aura toutes les autres par les formules ci-dessus.

43. Mais si on ne veut pas employer la méthode de tâtonnement que nous venons de proposer, & qui seroit souvent très-laborieuse, on pourra faire usage de celle qui est exposée dans le chap. 1^{er} du traité précédent; & qui est très-simple & très-directe, ou bien on pourra s'y prendre de la manière suivante.

On remarquera 1^o. que si les nombres
K k iv

a & b ne sont pas premiers entr'eux, l'équation ne pourra subsister en nombres entiers; à moins que le nombre donné c ne soit divisible par la plus grande commune mesure de a & b . De sorte qu'en supposant la division faite lorsqu'elle a lieu, & désignant les quotiens par a' , b' , c' , on aura à résoudre l'équation

$$a'x - b'y = c',$$

où a' & b' seront premiers entr'eux.

2°. Que si l'on peut trouver des valeurs de p & de q qui satisfassent à l'équation

$$a'p - b'q = \pm 1,$$

on pourra résoudre l'équation précédente; car il est visible qu'en multipliant ces valeurs par $\pm c'$, on aura des valeurs qui satisferont à l'équation $a'x - b'y = c'$; c'est-à-dire qu'on aura $x = \pm pc'$ & $y = \pm qc'$.

Or l'équation $a'p - b'q = \pm 1$ est toujours résoluble en nombres entiers, comme nous l'avons démontré dans l'art. 23; & pour trouver les plus petites valeurs de p & de q qui y peuvent satisfaire, il n'y aura qu'à

convertir la fraction $\frac{b'}{a'}$ en fraction continue par la méthode de l'art. 4, & en déduire ensuite la série des fractions principales convergentes vers la même fraction $\frac{b'}{a'}$ par les formules de l'art. 10; la dernière de ces fractions sera la fraction même $\frac{b'}{a'}$, & si on désigne l'avant-dernière par $\frac{p'}{q'}$, on aura par la loi de ces fractions, (art. 12), $a'p - b'q = \pm 1$, le signe supérieur étant pour le cas où le quantième de la fraction $\frac{b'}{a'}$ est pair; & l'inférieur pour celui où ce quantième est pair.

Ces valeurs de p & de q étant ainsi connues, on aura donc d'abord $x = \pm pc'$ & $y = \pm qc'$, & prenant ensuite ces valeurs pour a & b , on aura en général (art. 42), $x = \pm pc' \pm mb'$, $y = \pm qc' \pm ma'$, expressions qui renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles en nombres entiers de l'équation proposée.

Au reste, pour ne laisser aucun embarras

522 ADDITIONS.

dans la pratique de cette méthode, nous remarquerons que quoique les nombres a & b puissent être positifs ou négatifs, on peut néanmoins les prendre toujours positivement, pourvu qu'on donne des signes contraires à x , si a est négatif, & à y , si b est négatif.

E X E M P L E.

44. Pour donner un exemple de la méthode précédente, nous prendrons celui de l'art. 14 du chap. 1 du traité précéd. où il s'agit de résoudre l'équation $39p = 56q + 11$; changeant p en x & q en y , on aura donc

$$39x - 56y = 11.$$

Ainsi on fera $a = 39$, $b = 56$ & $c = 11$; & comme 56 & 39 sont déjà premiers entre eux, on aura $a' = 39$, $b' = 56$, $c' = 11$. On réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{b'}{a'} = \frac{56}{39}$, & pour cela on fera, (comme on l'a déjà pratiqué dans l'art. 20), le calcul suivant,

ADDITION 8. 523

$$\begin{array}{r} 39 \overline{) 56} 1 \\ \underline{39} \\ 17 39 2 \\ \underline{34} \\ 5 17 3 \\ \underline{15} \\ 2 5 2 \\ \underline{4} \\ 1 2 2 \\ \underline{2} \\ 0. \end{array}$$

Ensuite, à l'aide des quotiens 1, 2, 3, &c. on formera les fractions

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 2, & 2, & & \\ \frac{1}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{2}{16}, & \frac{2}{39}, & & \end{array}$$

& la pénultième fraction $\frac{2}{16}$ sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$; de sorte qu'on aura $p = 23$, $q = 16$; & comme cette fraction est la quatrième, & par conséquent d'un quantième pair, il faudra prendre le signe supérieur; ainsi l'on aura en général $x = 23.11 + 56m$, & $y = 16.11 + 39m$, m pouvant être un nombre quelconque entier positif ou négatif.

REMARQUE.

45. On doit la premiere solution de ce probleme à M. *Bachet de Meziriac*, qui l'a donnée dans la seconde édition de ses Récréations mathématiques, intitulées *Problemes plaisans & délectables*, &c. La premiere édition de cet Ouvrage a paru en 1612, mais la solution dont il s'agit, n'y est qu'annoncée, & ce n'est que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complete. La méthode de M. *Bachet* est très-directe & très-ingénieuse, & ne laisse rien à désirer du côté de l'élégance & de la généralité.

Nous faisons avec plaisir cette occasion de rendre à ce savant Auteur la justice qui lui est due sur ce sujet, parce que nous avons remarqué que les Géometres qui ont traité le même probleme après lui, n'ont jamais fait aucune mention de son travail.

Voici en peu de mots à quoi se réduit la méthode de M. *Bachet*. Après avoir fait voir comment la solution des équations de

la forme $ax - by = c$, (a & b étant premiers entr'eux), se réduit à celle de $ax - by = \pm 1$, il s'attache à résoudre cette dernière équation, & pour cela il prescrit de faire entre les nombres a & b la même opération que si on vouloit chercher leur plus grand commun diviseur, (c'est aussi la même que nous avons pratiquée ci-devant); ensuite nommant c, d, e, f , &c. les restes provenant des différentes divisions, & supposant, par exemple, que f soit le dernier reste qui sera nécessairement égal à l'unité, (à cause que a & b sont premiers entr'eux, *hyp.*), il fait, lorsque le nombre des restes est pair, comme dans ce cas,

$$e \mp 1 = \gamma, \frac{d \pm 1}{e} = \beta, \frac{f \mp 1}{d} = \gamma, \frac{\gamma \pm 1}{e} = \beta, \\ \frac{\beta \pm 1}{b} = \alpha;$$

ces derniers nombres β & α seront les plus petites valeurs de x & y .

Si le nombre des restes étoit impair, comme si g étoit le dernier reste $= 1$, alors il faudroit faire

$$f \pm 1 = \gamma, \frac{e \mp 1}{f} = \alpha, \frac{d \pm 1}{e} = \beta, \text{ &c.}$$

Il est facile de voir que cette méthode revient au même dans le fond que celle du chapitre premier ; mais elle en est moins commode , parce qu'elle demande des divisions ; au reste , les Géomètres qui sont curieux de ces matieres , verront avec plaisir dans l'Ouvrage de M. *Bachet* les artifices qu'il a employés pour parvenir à la regle précédente , & pour en déduire la solution complete des équations de la forme $ax - by = c$.



PARAGRAPHE IV.

Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les Equations à deux inconnues , dont l'une ne passe pas le premier degré.

Addition pour le Chapitre III.

46. **SOIT** proposée, l'équation générale , $a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y + \&c. = 0$, dans laquelle les coefficients $a, b, c \&c.$ soient des nombres entiers donnés , & où x & y soient deux nombres indéterminés , qui doivent aussi être entiers.

Tirant la valeur de y de cette équation , on aura

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \&c.}{c + ex + gx^2 + kx^3 + \&c.}$$

ainsi la question sera réduite à trouver un nombre entier qui , étant pris pour x , rende le numérateur de cette fraction divisible par son dénominateur.

Soit supposé

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \&c.$$

$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 + \&c.$$

& qu'on retranche x de ces deux équations par les règles ordinaires de l'Algebre, on aura une équation finale de cette forme,

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \&c.$$

$$= 0,$$

où les coefficients A, B, C &c. seront des fonctions rationnelles & entières des nombres $a, b, c, \&c.$

Maintenant, puisque $y = -\frac{p}{q}$, on aura aussi $p = -qy$; de sorte qu'en substituant cette valeur de p , il viendra

$$A - Byq + Cq + Dy^2q - Epqy + Fq^2 + \&c. = 0,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par q , à l'exception du premier terme A ; donc il faudra que le nombre A soit divisible par le nombre q , autrement il seroit impossible que les nombres q & y pussent être entiers à la fois.

On cherchera donc tous les diviseurs du nombre entier connu A , & on prendra successivement

successivement chacun de ces diviseurs pour q ; on aura par chacune de ces suppositions une équation déterminée en x , dont on cherchera, par les méthodes connues, les racines rationnelles & entières, s'il y en a; on substituera ensuite ces racines à la place de x , & on verra si les valeurs résultantes de p & de q seront telles que $\frac{p}{q}$ soit un nombre entier. On sera sûr de trouver par ce moyen toutes les valeurs entières de x , qui peuvent donner aussi des valeurs entières pour y dans l'équation proposée.

De-là on voit que le nombre des solutions en entiers de ces sortes d'équations est toujours nécessairement limité; mais il y a un cas qui doit être excepté, & qui échappe à la méthode précédente.

47. Ce cas est celui où les coefficients $e, g, k, \&c.$ sont nuls; en sorte que l'on ait simplement

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 + \&c.}{c};$$

or voici comment il faudra s'y prendre

pour trouver toutes les valeurs de x qui pourront rendre la quantité

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \&c.$$

divisible par le nombre donné c : je suppose d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui satisfasse à cette condition, il est facile de voir que tout nombre de la forme $n + \mu c$ y satisfera aussi, μ étant un nombre quelconque entier ; de plus si n est $> \frac{c}{2}$, (abstraction faite des signes de n & de c), on pourra toujours déterminer le nombre μ & le signe qui le précède ; en sorte que le nombre $n + \mu c$ devienne $< \frac{c}{2}$; & il est aisé de voir que cela ne sauroit se faire que d'une seule manière, les valeurs de n & de c étant données ; donc si on désigne par n' cette valeur de $n + \mu c$, laquelle est $< \frac{c}{2}$, & qui satisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général $n = n' + \mu c$, μ étant un nombre quelconque.

D'où je conclus que si on substitue successivement, dans la formule $a + bx + dx^2 + fx^3 +, \&c.$ à la place de x tous les nombres entiers positifs ou négatifs qui ne passent

pas $\frac{c}{2}$, & qu'on dénote par n' , n'' , n''' &c. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a + bx + dx^2 + \&c.$ divisible par c , tous les autres nombres qui pourront faire le même effet, seront nécessairement renfermés dans ces formules

$$n' + \mu' c, n'' + \mu'' c, n''' + \mu''' c, \&c.$$

μ' , μ'' , μ''' , &c. étant des nombres quelconques entiers.

On pourroit faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n' , n'' , n''' , &c. mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768, & qui a pour titre *nouvelle Méthode pour résoudre les Problèmes indéterminés*.

48. Je dirai cependant encore un mot de la manière de déterminer deux nombres x & y , en sorte que la fraction

$$\frac{ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + fy^{m-3}x^3 + \&c.}{c}$$

devienne un nombre entier ; c'est une recherche qui nous fera fort utile dans la suite.

Je suppose que y & x doivent être premiers entr'eux, & que de plus y doive être premier à c , je dis qu'on pourra toujours faire $x = ny - cz$, n & z étant des nombres indéterminés ; car en regardant x , y & c comme des nombres donnés, on aura une équation qui sera toujours résoluble en entiers par la méthode du §. III, à cause que y & c n'ont d'autre commune mesure que l'unité, par l'hypothèse. Or si on substitue cette expression de x dans la quantité $ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + \&c.$ elle deviendra

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 + \&c.)y^m \\ - (b + 2dn + 3fn^2 + \&c.)cy^{m-1}z \\ + (d + 3fn + \&c.)c^2y^{m-2}z^2 \\ - \&c.$$

& il est clair que cette quantité ne sauroit être divisible par c , à moins que le premier terme

$(a + bn + dn^2 + fn^3 + \&c.)y^m$
ne le soit, puisque tous les autres termes

sont des multiples de c . Donc, comme c & y sont supposés premiers entr'eux, il faudra que la quantité

$$a + bn + dn^2 + fn^3 + \&c.$$

soit elle-même divisible par c ; ainsi il n'y aura qu'à chercher par la méthode de l'art. préc. toutes les valeurs de n qui pourront satisfaire à cette condition, & alors on aura en général

$$x = ny - az,$$

z étant un nombre quelconque entier.

Il est bon d'observer que quoique nous ayons supposé que les nombres x & y doivent être premiers entr'eux, ainsi que les nombres y & c , notre solution n'en est cependant pas moins générale ; car si on vouloit que x & y eussent une commune mesure a , il n'y auroit qu'à mettre ax' & ay' à la place de x & y , & on regarderoit ensuite x' & y' comme premiers entr'eux ; de même si y' & c devoient avoir une commune mesure β , on pourroit mettre $\beta y''$ à la place de y' , & il seroit permis de regarder y'' & c comme premiers entr'eux.

PARAGRAPHE V.

Méthode directe & générale pour trouver les valeurs de x , qui peuvent rendre rationnelles les quantités de la forme

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)},$$

& pour résoudre en nombres rationnels les équations indéterminées du second degré à deux inconnues, lorsqu'elles admettent des solutions de cette espèce.

Addition pour le Chapitre IV.

49. JE suppose d'abord que les nombres connus a , b , c soient entiers; s'ils étoient fractionnaires, il n'y auroit qu'à les réduire à un même dénominateur carré, & alors il est clair qu'on pourroit toujours faire abstraction de leur dénominateur; quant au nombre x , on supposera ici qu'il puisse être entier ou fractionnaire, & on verra par la suite comment il faudra résoudre la question, lorsqu'on ne veut admettre que des nombres entiers.

Soit donc

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}=y,$$

& l'on en tirera

$$2cx+b=\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)};$$

de sorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle la quantité

$$\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)}.$$

50. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(Ay^2+B)}$, c'est-à-dire, à rendre Ay^2+B égal à un carré, A & B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, & y un nombre indéterminé qui doit être rationnel.

Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B étoit $=1$, ou égal à un carré quelconque, le problème seroit résolvable par les méthodes connues de *Diophante*, qui sont détaillées dans le chap. IV; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres.

De plus, si les nombres A & B étoient divisibles par des nombres carrés quelconques, on pourroit aussi faire abstraction de

ces diviseurs, c'est-à-dire, les supprimer, en ne prenant pour $A \& B$ que les quotiens qu'on auroit après avoir divisé les valeurs données par les plus grands carrés possibles; en effet, supposant $A = a^2 A'$, & $B = b^2 B'$, on aura à rendre carré le nombre $A' a^2 y^2 + B' b^2$; donc divisant par b^2 , & faisant $\frac{a^2 y^2}{b^2} = y'$, il s'agira de déterminer l'inconnue y' ; en sorte que $A' y'^2 + B'$ soit un carré.

D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre $Ay^2 + B$ égal à un carré, en rejetant dans les valeurs données de A & de B les facteurs carrés a^2 & b^2 qu'elles pourroient renfermer, il n'y aura qu'à multiplier la valeur trouvée de y par $\frac{b}{a}$, pour avoir celle qui convient à la quantité proposée.

51. Considérons donc la formule $Ay^2 + B$, dans laquelle $A \& B$ soient des nombres entiers donnés qui ne soient divisibles par aucun carré; & comme on suppose que y puisse être une fraction, faisons $y = \frac{p}{q}$, p & q étant des nombres entiers & premiers

entr'eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura donc la quantité $\frac{Ap^2}{q^2} + B$ qui devra être un carré; donc $Ap^2 + Bq^2$ devra en être un aussi; de sorte qu'on aura à résoudre l'équation $Ap^2 + Bq^2 = r^2$, en supposant p, q & r des nombres entiers.

Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A , & que p le soit à B ; car si q & A avoient un commun diviseur, il est clair que le terme Bq^2 seroit divisible par le carré de ce diviseur; & que le terme Ap^2 ne seroit divisible que par la première puissance du même diviseur, à cause que q & p sont premiers entr'eux, & que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre $Ap^2 + Bq^2$ ne seroit divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q & de A , par conséquent il seroit impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p & B ne sauroient avoir aucun diviseur commun.

Résolution de l'équation $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ en nombres entiers.

§2. Supposons A plus grand que B , on écrira cette équation ainsi,

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2,$$

& on remarquera que comme les nombres p , q & z doivent être entiers, il faudra que $z^2 - Bq^2$ soit divisible par A .

Donc, puisque A & q sont premiers entr'eux, (art. préc.), on fera, suivant la méthode du §. IV, art. 48, ci-dessus,

$$z = nq - Aq',$$

n & q' étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui changera la formule $z^2 - Bq^2$ en celle-ci,

$$(n^2 - B)q^2 - 2nAqq' + A^2q'^2,$$

dans laquelle il faudra que $n^2 - B$ soit divisible par A , en prenant pour n un nombre entier non $> \frac{A}{2}$.

On essayera donc pour n tous les nombres entiers qui ne surpassent pas $\frac{A}{2}$, & si on n'en trouve aucun qui rende $n^2 - B$ divisible par A , on en conclura sur le champ

que l'équation $Ap^2 = z^2 - Bq^2$ n'est pas résoluble en nombres entiers, & qu'ainsi la quantité $Ay^2 + B$ ne sauroit jamais devenir un carré.

Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs satisfaisantes de n , on les mettra l'une après l'autre à la place de n , & on poursuivra le calcul comme on va le voir.

Je remarquerai seulement encore qu'il seroit inutile de donner aussi à n des valeurs plus grandes que $\frac{A}{2}$; car nommant n' , n'' , n''' &c. les valeurs de n moindres que $\frac{A}{2}$, qui rendront $n^2 - B$ divisible par A , toutes les autres valeurs de n qui pourront faire le même effet seront renfermées dans ces formules, $n' + \mu'A$, $n'' + \mu''A$, $n''' + \mu'''A$ &c. (article 47 du §. IV); or substituant ces valeurs à la place de n dans la formule $(n^2 - B)q^2 - 2nAqq' + A^2q'^2$, c'est-à-dire $(nq - Aq')^2 - Bq^2$, il est clair qu'on aura les mêmes résultats que si on mettoit seulement n' , n'' , n''' &c. à la place de n , & qu'on ajoutât à q' les quantités $\mp \mu'q$,

$\mp^{\mu''}q$, $\mp^{\mu'''}q$ &c. de sorte que, comme q' est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneront pas des formules différentes de celles qu'on aura par la simple substitution des valeurs n' , n'' , n''' , &c.

53. Puis donc que $n-B$ doit être divisible par A , soit A' le quotient de cette division, en sorte que $AA' = n-B$; &c l'équation $Ap^2 = q^2 - Bq^2 = (n-B)q^2 - 2nAqq' + A'q^2$, étant divisée par A , deviendra celle-ci,

$$p^2 = A'q^2 - 2nqq' + Aq^2,$$

où A' sera nécessairement moindre que A , à cause que $A' = \frac{n-B}{A}$ &c que $B < A$, &c n non $> \frac{A}{2}$.

Or 1°. si A' est un nombre carré, il est clair que cette équation sera résoluble par les méthodes connues, &c l'on en aura la solution la plus simple qu'il est possible, en faisant $q' = 0$, $q = 1$ &c $p = \sqrt{A'}$.

2°. Si A' n'est pas égal à un carré, on verra si ce nombre est moindre que B , ou

au moins s'il est divisible par un nombre quelconque carré, en sorte que le quotient soit moindre que B , abstraction faite des signes; alors on multipliera toute l'équation par A' , &c l'on aura, à cause de $AA' = n-B$,

$$A'p^2 = (A'q - nq')^2 - Bq^2;$$

de sorte qu'il faudra que $Bq^2 + A'p^2$ soit un carré; donc divisant par p^2 &c faisant $\frac{q}{p} = y'$ &c $A' = C$, on aura à rendre carrée la formule $By'^2 + C$, laquelle est, comme l'on voit, analogue à celle de l'art. 2. Ainsi, si C contient un facteur carré γ^2 , on pourra le supprimer, en ayant attention de multiplier ensuite par γ la valeur qu'on trouvera pour y' , pour avoir sa véritable valeur; &c l'on aura une formule qui sera dans le cas de celle de l'art. 51, mais avec cette différence que les coefficients B &c C de celle-ci seront moindres que les coefficients A &c B de celle-là.

54. Mais si A' n'est pas moindre que B , ni ne peut le devenir en le divisant par le

plus grand carré qui le mesure, alors on fera $q = vq' + q''$, & substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra

$$p^2 = A'q'^2 - 2n'q'q'' + A''q''^2,$$

où $n' = n - vA'$,

$$\& A'' = A'v^2 - 2nv + A = \frac{n^2 - B}{A'}.$$

On déterminera, ce qui est toujours possible, le nombre entier v , en sorte que n' ne soit pas $> \frac{A'}{2}$, abstraction faite des signes, & alors il est clair que A'' deviendra $< A'$, à cause de $A'' = \frac{n^2 - B}{A'}$ & de $B = 4A'$, & n ou $< \frac{A'}{2}$.

On fera donc ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, & si A'' est carré, on aura la résolution de l'équation; si A'' n'est pas carré, mais qu'il soit $< B'$ ou qu'il le devienne, étant divisé par un carré, on multipliera l'équation par A'' & on aura, en faisant $\frac{P}{q} = y$, & A''

$= C$, la formule $By^2 + C$, qui devra être un carré, & dans laquelle les coefficients B & C , (après avoir supprimé dans C les diviseurs carrés, s'il y en a), seront moindres que ceux de la formule $Ay^2 + B$ de l'art. 51.

Mais si ces cas n'ont pas lieu, on fera, comme ci-dessus, $q' = v'q'' + q'''$, & l'équation se changera en celle-ci,

$$p^2 = A'''q''^2 - 2n''q''q''' + A''''q'''^2,$$

où $n'' = n' - v'A''$,

$$\& A'''' = A''v'^2 - 2n''v' + A' = \frac{n'^2 - B}{A''}.$$

On prendra donc pour v' un nombre entier, tel que n'' ne soit pas $> \frac{A''}{2}$, abstraction faite des signes; & comme B' n'est pas $> A''$, (hyp.), il s'ensuit de l'équation $A'''' = \frac{n'^2 - B}{A''}$ que A'''' sera $< A''$; ainsi on pourra faire derechef les mêmes raisonnemens que ci-dessus, & on en tirera des conclusions semblables, & ainsi de suite.

Maintenant, comme les nombres A, A', A'', A''' &c. forment une suite décroissante de nombres entiers, il est visible qu'en continuant cette suite on parviendra nécessairement à un terme moindre que le nombre donné B ; & alors nommant ce terme C , on aura, comme nous l'avons vu ci-dessus, la formule $Bx^2 + C$ à rendre égale à un carré. De sorte que par les opérations que nous venons d'exposer, on sera toujours assuré de pouvoir ramener la formule $Ax^2 + B$ à une autre plus simple, telle que $Bx^2 + C$, au moins si le problème est résoluble.

55. Or, de même qu'on a réduit la formule $Ax^2 + B$ à celle-ci $Bx^2 + C$, on pourra réduire cette dernière à cette autre-ci, $Cy^2 + D$, où D sera moindre que C , & ainsi de suite; & comme les nombres A, B, C, D &c. forment une série décroissante de nombres entiers, il est clair que cette série ne pourra pas aller à l'infini, & qu'ainsi l'opération sera toujours nécessairement

rement terminée. Si la question n'admet point de solution en nombres rationnels, on parviendra à une condition impossible; mais si la question est résoluble, on arrivera toujours à une équation semblable à celle de l'art. 53, & où l'un des coefficients, comme A' , sera carré; en sorte qu'elle sera susceptible des méthodes connues; or cette équation étant résolue, on pourra, en retrogradant, résoudre successivement toutes les équations précédentes, jusqu'à la première $Ap^2 + Bq^2 = r^2$.

Eclaircissons cette méthode par quelques exemples.

E X E M P L E I.

56. Soit proposé de trouver une valeur rationnelle de x , telle que la formule

$$7 + 15x + 13x^2$$

devienne un carré. (Voy. chap. IV. art. 57 du traité précédent).

On aura donc ici $a=7, b=15, c=13$; donc $4c=4.13$, & $b^2-4ac=-139$, de sorte qu'en nommant y la racine du carré

dont il s'agit, on aura la formule $4.13y^2 - 139$ qui devra être un carré; ainsi on aura $A=4.13$ & $B=-139$, où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré 4; de sorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré & supposer simplement $A=13$; mais on se souviendra ensuite de diviser par 2 la valeur qu'on trouvera pour y , (art. 50).

On aura donc, en faisant $y=\frac{z}{2}$, l'équation $13p^2-139q^2=z^2$, ou bien, à cause que 139 est >13 , on fera $y=\frac{z}{p}$, pour avoir $-139p^2+13q^2=z^2$, équation qu'on écrira ainsi,

$$-139p^2=z^2-13q^2.$$

On fera, (art. 52), $z=nq-139q'$, & il faudra prendre pour n un nombre entier non $>\frac{139}{2}$, c'est-à-dire <70 , tel que n^2-13 soit divisible par 139; je trouve $n=41$, ce qui donne $n^2-13=1668=139.12$; de sorte qu'en faisant la substitution & divisant ensuite par -139 , on aura l'équation

$$p^2=-12q^2+2.41qq'-139q'^2.$$

Or, comme -12 n'est pas un carré, cette équation n'a pas encore les conditions requises; ainsi, puisque 12 est déjà moindre que 13, on multipliera toute l'équation par -12 , & elle deviendra $-12p^2=(-12q^2+41q^2)-139q'^2$, de sorte qu'il faudra que $139q^2-12p^2$ soit un carré, ou bien, en faisant $\frac{q'}{p}=y$, que $13y^2-12$, en soit un aussi.

On voit ici qu'il n'y auroit qu'à faire $y=1$, mais comme ce n'est que le hasard qui nous donne cette valeur, nous allons poursuivre le calcul selon notre méthode, jusqu'à ce que l'on arrive à une formule qui soit susceptible des méthodes ordinaires. Comme 12 est divisible par 4, je rejete ce diviseur carré, en me souvenant que je dois ensuite multiplier la valeur de y' par 2; j'aurai donc à rendre carrée la formule $13y'^2-3$, ou bien, en faisant $y'=\frac{r}{s}$, (on suppose que r & s sont des nombres entiers premiers entr'eux, en sorte que la fraction

$\frac{7}{2}$ soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction $\frac{2}{p}$, celle-ci $13r^2 - 3f^2$; soit la racine r' , j'aurai

$$13r^2 = r'^2 + 3f^2,$$

& je ferai $r' = mf - 13f'$, m étant un nombre entier non $> \frac{13}{2}$, c'est-à-d. < 7 , & tel que $m^2 + 3$ soit divisible par 13; or je trouve $m=6$, ce qui donne $m^2 + 3 = 39 = 13 \cdot 3$; donc substituant la valeur de r' & divisant toute l'équation par 13, on aura

$$r^2 = 3f^2 - 2.6ff' + 13f'^2.$$

Comme le coefficient 3 de f^2 n'est ni carré ni moindre que celui de f^2 dans l'équation précédente, on fera, (art. 54), $f = \mu f' + f''$, & substituant l'on aura la transformée

$r^2 = 3f'^2 - 2(6-3\mu)ff' + (3\mu^2 - 2.6\mu + 13)f''^2$; on déterminera μ , en sorte que $6-3\mu$ ne soit pas $> \frac{1}{2}$, & il est clair qu'il faudra faire $\mu=2$, ce qui donne $6-3\mu=0$; & l'équation deviendra

$$r^2 = 3f''^2 + f'^2,$$

laquelle est, comme l'on voit, réduite à

l'état demandé, puisque le coefficient du carré de l'une des deux indéterminées du second membre est aussi carré.

On fera donc, pour avoir la solution la plus simple qu'il est possible, $f''=0$, $f'=1$ & $r=1$; donc $f=\mu=2$, & de-là $y'=\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$; mais nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de y' par 2; ainsi on aura $y'=1$; donc, en rétrogradant toujours, on aura $\frac{q'}{p}=1$; donc $q'=p$; donc l'équa-

tion $-12p^2 = (-12q + 41q')^2 - 13q'^2$, donnera $(-12q + 41p)^2 = p^2$; donc $-12q + 41p = p$, c'est-à-dire $12q = 40p$; donc $\frac{q}{p} = \frac{10}{3} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$; mais comme il faut diviser la valeur de y par 2, on aura $y = \frac{5}{3}$; ce sera le côté de la racine de la formule proposée $7 + 15x + 13x^2$; ainsi faisant cette quantité $= \frac{25}{9}$, on trouvera par la résolution de l'équation, $26x + 15 = \pm \frac{7}{3}$, d'où $x = -\frac{19}{39}$, ou $= -\frac{2}{3}$.

On auroit pu prendre aussi $-12q + 41p = -p$, & l'on auroit eu $y = \frac{q}{p} = \frac{41}{6}$, &

divisant par 2, $\frac{21}{12}$, faisant donc $7+15x$
 $+13x^2 = (\frac{21}{12})^2$, on trouvera $26x+15$
 $= \frac{9}{2}$; donc $x = \frac{27}{12}$, où $= \frac{9}{4}$;

Si on vouloit avoir d'autres valeurs de x ,
 il n'y auroit qu'à chercher d'autres solutions
 de l'équation $x^2 + f^2$, laquelle est
 résoluble en général par les méthodes con-
 nues; mais on peut aussi, dès qu'on connoît
 une seule valeur de x , en déduire immé-
 diatement toutes les autres valeurs satisfai-
 santes de x par la méthode expliquée dans
 le chap. IV du traité précédent.

REMARQUE.

57. Supposons en général que la quan-
 tité $a+bx+cx^2$ devienne égale à un carré
 g^2 , lorsque $x=f$, en sorte que l'on ait
 $a+bf+cf^2=g^2$; donc $a=g^2-bf-cf^2$;
 de sorte qu'en substituant cette valeur dans
 la formule proposée, elle deviendra
 $g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)$.

Qu'on prenne $g+m(x-f)$ pour la ra-
 cine de cette quantité, m étant un nom-
 bre indéterminé, &c. l'on aura l'équation

$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)=g^2+2mg(x-f)$
 $+m^2(x-f)^2$, c'est-à-dire en effaçant g^2
 de part & d'autre, &c. divisant ensuite par
 $x-f$, $b+c(x+f)=2mg+m^2(x-f)$;
 d'où l'on tire

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c}.$$

Et il est clair qu'à cause du nombre indé-
 terminé m , cette expression de x doit ren-
 fermer toutes les valeurs qu'on peut donner
 à x , pour que la formule proposée devienne
 un carré; car quel que soit le nombre carré
 auquel cette formule peut être égale, il est
 visible que la racine de ce nombre pourra
 toujours être représentée par $g+m(x-f)$,
 en donnant à m une valeur convenable.
 Ainsi quand on aura trouvé par la mé-
 thode expliquée ci-dessus une seule valeur
 satisfaisante de x , il n'y aura qu'à la prendre
 pour f , &c. la racine du carré qui en résultera
 pour g ; l'on aura, par la formule précé-
 dente, toutes les autres valeurs possibles
 de x .

Dans l'exemple précédent on a trouvé

Mm iv

$y = \frac{1}{3}$ & $x = -\frac{2}{3}$; ainsi on fera $g = \frac{2}{3}$, & $f = -\frac{2}{3}$, & l'on aura

$$x = \frac{19 - 10m - 2m^2}{3(m^2 - 13)},$$

c'est l'expression générale des valeurs rationnelles de x , qui peuvent rendre carrée la quantité $7 + 15x + 13x^2$.

EXEMPLE I I.

58. Soit encore proposé de trouver une valeur rationnelle de y , telle que $23y^2 - 5$ soit un carré.

Comme 23 & 5 ne sont divisibles par aucun nombre carré, il n'y aura aucune réduction à y faire. Ainsi en faisant $y = \frac{r}{f}$, il faudra que la formule $23p^2 - 5q^2$ devienne un carré z^2 ; de sorte qu'on aura l'équation $23p^2 = z^2 + 5q^2$.

On fera donc $z = nq - 23q^2$; & il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{23}{5}$, tel que $n^2 + 5$ soit divisible par 23. Je trouve $n = 8$, ce qui donne $n^2 + 5 = 23 \cdot 3$, & cette valeur de n est la seule qui ait

les conditions requises. Substituant donc $8q - 23q^2$ à la place de z , & divisant toute l'équation par 23, j'aurai celle-ci,

$$p^2 = 3q^2 - 2.8qq' + 23q'^2,$$

dans laquelle on voit que le coefficient 3 est déjà moindre que la valeur de B qui est 5, abstraction faite du signe.

Ainsi on multipliera toute l'équation par 3, & l'on aura $3p^2 = (3q - 8q')^2 + 5q'^2$; de sorte qu'en faisant $\frac{q'}{p} = y$, il faudra que

la formule $-5y^2 + 3$ soit un carré, où les coefficients 5 & 3 n'admettent aucune réduction.

Soit donc $y = \frac{r}{f}$, (r & f sont supposés premiers entr'eux, au lieu que q' & p peuvent ne pas l'être), & l'on aura à rendre carrée la quantité $-5r^2 + 3f^2$; de sorte qu'en nommant la racine z' , on aura $-5r^2 + 3f^2 = z'^2$, & de-là $-5r^2 = z'^2 - 3f^2$.

On prendra donc $z' = mf + 5f$, & il faudra que m soit un nombre entier non $> \frac{5}{3}$, & tel que $m^2 - 3$ soit divisible par 5; or c'est ce qui est impossible, car on ne

pourroit prendre que $m=1$ ou $=2$, ce qui donne $m^2-3=-2$ ou $=1$. Ainsi on en doit conclure que le problème n'est pas résolvable, c'est-à-dire qu'il est impossible que la formule $23y^2-5$ puisse jamais devenir égale à un nombre carré, quelque nombre que l'on substitue à la place de y .

COROLLAIRE.

59. Si on avoit une équation quelconque du second degré à deux inconnues, telle que $a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0$, & que l'on proposât de trouver des valeurs rationnelles de x & y qui satisfissent à cette équation, on y pourroit parvenir, lorsque cela est possible, par la méthode que nous venons d'exposer.

En effet, si on tire la valeur de y en x , on aura

$$2fy+ex+c=\sqrt{((c+ex)^2-4f(a+bx+dx^2))},$$

ou bien en faisant

$$a=c^2-4af; \quad b=2ce-4bf; \quad c=e^2-4df,$$

$$2fy+ex+c=\sqrt{(a+bx+dx^2)};$$

de sorte que la question sera réduite à trouver des valeurs de x qui rendent rationnel le radical $\sqrt{(a+bx+dx^2)}$.

REMARQUE.

60. Nous avons déjà traité ce même sujet, mais d'une manière un peu différente, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour l'année 1767, & nous croyons être les premiers qui ayons donné une méthode directe & exempte de tâtonnement pour la solution des problèmes indéterminés du second degré. Le Lecteur qui sera curieux d'approfondir cette matière, pourra consulter les Mémoires cités, où il trouvera sur-tout des remarques nouvelles & importantes sur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour a , peuvent rendre $a-B$ divisible par A , A & B étant des nombres donnés.

On trouvera aussi dans les Mémoires pour les années 1770 & suivantes, des recherches sur la forme des diviseurs des nombres représentés par $a-Bq^2$; de sorte que par la forme même du nombre A , on pourra juger souvent de l'impossibilité de l'équation $Ay^2=a-Bq^2$, où $Ay^2+B=a$ un carré, (art. 52).

PARAGRAPHE VI.

Sur les doubles & triples Egalités.

61. **N**ous traiterons ici en peu de mots des doubles & triples égalités, qui sont d'un usage très-fréquent dans l'analyse de *Diophante*, & pour la solution desquelles ce grand Géometre & ses Commentateurs ont cru devoir donner des regles particulieres.

Lorsqu'on a une formule contenant une ou plusieurs inconnues à éгалer à une puissance parfaite, comme à un carré ou à un cube &c. cela s'appelle dans l'analyse de *Diophante* une égalité simple; & lorsqu'on a deux formules contenant la même ou les mêmes inconnues à éгалer chacune à des puissances parfaites, cela s'appelle une égalité double, & ainsi de suite.

Jusqu'ici on a vu comment il faut résoudre les égalités simples où l'inconnue ne passe pas le second degré, & où la puissance proposée est la seconde, c'est-à-dire le carré.

Voyons donc comment on doit traiter les égalités doubles & triples de la même espece.

62. Soit d'abord proposée cette égalité doublée,

$$a + bx = \text{à un carré}$$

$$c + dx = \text{à un carré},$$

où l'inconnue x ne se trouve qu'au premier degré.

Faisant $a + bx = u^2$ & $c + dx = u^2$, & chassant x de ces deux équations, on aura $ad - bc = d^2 - bu^2$; donc $d^2 = bu^2 + ad - bc$, & $(dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)d$; de sorte que la difficulté sera réduite à trouver une valeur rationnelle de u , telle que $dbu^2 + ad - bcd$ devienne un carré. On résoudra cette égalité simple par la méthode exposée ci-dessus, & connoissant ainsi u on aura $x = \frac{u^2 - c}{d}$.

Si l'égalité doublée étoit

$$ax^2 + bx = \text{à un carré}$$

$$cx^2 + dx = \text{à un carré},$$

il n'y auroit qu'à faire $x = \frac{1}{x'}$, & multi-

plier ensuite l'une & l'autre formule par le carré x^2 , on auroit ces deux autres égalités $a+bx \equiv \text{à un carré}$ & $c+dx \equiv \text{à un carré}$, qui sont semblables aux précédentes.

Ainsi on peut résoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne passe pas le premier degré, & celles où l'inconnue se trouve dans tous les termes, pourvu qu'elle ne passe pas le second degré; mais il n'en est pas de même lorsque l'on a des égalités de cette forme,

$$a+bx+cx^2 \equiv \text{à un carré}$$

$$a+\beta x+\gamma x^2 \equiv \text{à un carré.}$$

Si on résout la première de ces égalités par notre méthode, & qu'on nomme f la valeur de x qui rend $a+bx+cx^2 \equiv$ au carré g^2 , on aura en général, (art. 57),

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c};$$

donc substituant cette expression de x dans l'autre formule $a+\beta x+\gamma x^2$, & la multipliant ensuite par $(m^2-c)^2$, on aura à résoudre l'égalité,

$$\alpha(m^2-c)^2 + \beta(m^2-c)(fm^2 - 2gm + b + cf)$$

$+ \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2 \equiv \text{à un carré}$, dans laquelle l'inconnue m monte au quatrième degré.

Or on n'a jusqu'à présent aucune règle générale pour résoudre ces sortes d'égalités, & tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connoît une seule. (Voyez le chapitre IX).

63. Si on avoit la triple égalité

$$\left. \begin{array}{l} ax+by \\ cx+dy \\ hx+ky \end{array} \right\} \equiv \text{à un carré,}$$

on feroit $ax+by = u^2$, $cx+dy = v^2$, & $hx+ky = f^2$, & chassant x de ces trois équations, on auroit celle-ci, $(ak-bh)u^2 - (ck-dh)v^2 = (ad-cb)f^2$; de sorte qu'en faisant $\frac{u}{f} = z$, la difficulté se réduiroit à résoudre l'égalité simple,

$$\frac{ak-bh}{ad-cb} z^2 - \frac{ck-dh}{ad-cb} = \text{à un carré,}$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de notre méthode générale.

Ayant trouvé la valeur de z , on aura $u=1z$, & les deux premières équations donneront

$$x = \frac{d-bz}{ad-cb} t, \quad y = \frac{a-z-c}{ad-cb} t.$$

Mais si la triple égalité proposée ne contenoit qu'une seule variable, on retomberoit alors dans une égalité où l'inconnue monteroit au quatrième degré.

En effet, il est clair que ce cas peut se déduire du précédent, en faisant $y=1$; de sorte qu'il faudra que l'on ait $\frac{az^2-c}{ad-cb} t^2 = 1$, & par conséquent $\frac{az^2-c}{ad-cb} = \text{à un carré.}$

Or nommant f une des valeurs de z qui peuvent satisfaire à l'égalité ci-dessus, & faisant, pour abrégér, $\frac{ak-bh}{ad-cb} = e$, on aura en général, (art. 57),

$$z = \frac{fm^2 - 2gm + ef}{m^2 - e}.$$

Donc, substituant cette valeur de z dans la dernière égalité, & la multipliant toute par le carré de $m^2 - e$, on aura celle-ci,

$$a(fm^2$$

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb} = \text{à un carré, où l'inconnue } m \text{ monte, comme l'on voit, au quatrième degré.}$$

PARAGRAPHE VII.

Méthode directe & générale pour trouver toutes les valeurs de y exprimées en nombres entiers, par lesquelles on peut rendre rationnelles les quantités de la forme

$$\sqrt{(Ay^2 + B)},$$

A & B étant des nombres entiers donnés; & pour trouver, aussi, toutes les solutions possibles en nombres entiers des Equations indéterminées du second degré à deux inconnues.

Addition pour le Chapitre VI.

64. QUOIQUE par la méthode du §. V on puisse trouver des formules générales qui renferment toutes les valeurs rationnelles de y , propres à rendre $Ay^2 + B$ égal à un carré, cependant ces formules ne font

d'aucun usage, lorsqu'on demande pour y des valeurs exprimées en nombres entiers; c'est pourquoi nous sommes obligés de donner ici une méthode particulière pour résoudre la question dans le cas des nombres entiers.

Soit donc $Ay + B = x^2$; & comme A & B sont supposés des nombres entiers, & que y doit être aussi un nombre entier, il est clair que x devra être pareillement entier; de sorte qu'on aura à résoudre en entiers l'équation

$$x^2 = Ay + B.$$

Je commence par remarquer ici que si B n'est divisible par aucun nombre carré, il faudra nécessairement que y soit premier à B ; car supposons, s'il est possible, que y & B aient une commune mesure a , en sorte que $y = ay$, & $B = aB$; donc on aura $x^2 = Aay + aB$, d'où il s'ensuit qu'il faudra que x^2 soit divisible par a ; & comme a n'est ni carré ni divisible par aucun carré; (*hyp.*); à cause que a est facteur

de B , il faudra que x soit divisible par a ; faisant donc $x = ax$, on aura $a^2x^2 = aAy + aB$, ou bien en divisant par a , $ax^2 = Ay + B$; d'où l'on voit que B devroit encore être divisible par a , ce qui est contre l'hypothèse.

Ce n'est donc que lorsque B contient des facteurs carrés que y peut avoir une commune mesure avec B ; & il est facile de voir par la démonstration précédente que cette commune mesure de y & de B ne peut être que la racine d'un des facteurs carrés de B , & que le nombre x devra avoir la même commune mesure; en sorte que toute l'équation sera divisible par le carré de ce commun diviseur de x , y & B .

De-là je conclus, 1°. que si B n'est divisible par aucun carré, y & B seront premiers entr'eux.

2°. Que si B est divisible par un seul carré a , y pourra être premier à B ou divisible par a , ce qui fait deux cas qu'il faudra examiner séparément; dans le premier

cas on résoudra l'équation $x^a - Ay^b = B$, en supposant y & B premiers entr'eux; dans le second on aura à résoudre l'équation $x^a - Ay^b = B'$, B' étant $\frac{B}{a}$; en supposant aussi y & B' premiers entr'eux; mais il faudra ensuite multiplier par a les valeurs qu'on aura trouvées pour y & x , pour avoir les valeurs convenables à l'équation proposée.

3°. Que si B est divisible par deux différens carrés, a^2 & β^2 , on aura trois cas à considérer; dans le premier on résoudra l'équation $x^a - Ay^b = B$, en regardant y & B comme premiers entr'eux; dans le second on résoudra de même l'équation $x^a - Ay^b = B'$, B' étant $\frac{B}{a^2}$, dans l'hypothèse de y & B' premiers entr'eux; & on multipliera ensuite les valeurs de x & y par a ; dans le troisieme on résoudra l'équation $x^a - Ay^b = B''$, B'' étant $\frac{B}{\beta^2}$, dans l'hypothèse de y & B'' premiers entr'eux, & on multipliera ensuite les valeurs de x & de y par β .

4°. &c. Ainsi on aura autant d'équations différentes à résoudre, qu'il y aura de différens diviseurs carrés de B ; mais ces équations seront toutes de la même forme $x^a - Ay^b = B$, & y fera aussi toujours premier à B .

65. Considérons donc en général l'équation $x^a - Ay^b = B$, où y est premier à B ; & comme x & y doivent être des nombres entiers, il faudra que $x^a - Ay^b$ soit divisible par B .

On fera donc, suivant la méthode du §. IV, art. 48, $x = ny - Bz$, & l'on aura l'équation

$(n^a - A)y^b - 2nByz + B^2z^2 = B$, par laquelle on voit que le terme $(n^a - A)y^b$ doit être divisible par B ; puisque tous les autres le sont d'eux-mêmes; donc, comme y est premier à B , (*hyp.*); il faudra que $n^a - A$ soit divisible par B ; de sorte qu'en faisant $\frac{n^a - A}{B} = C$, on aura, après avoir divisé par B ,

$$Cy^b - 2nyz + Bz^2 = 1;$$

or cette équation est plus simple que la proposée, en ce que le second membre est égal à l'unité.

On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^2 - A$ divisible par B ; pour cela il suffira, (art. 47), d'essayer pour n tous les nombres entiers positifs ou négatifs non $> \frac{B}{2}$; & si parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui satisfasse, on en conclura d'abord qu'il est impossible que $n^2 - A$ puisse être divisible par B ; & qu'ainsi l'équation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers.

Mais si on trouve de cette manière un ou plusieurs nombres satisfaisans, on les prendra l'un après l'autre pour n , ce qui donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter séparément, & dont chacune pourra fournir une ou plusieurs solutions de la question proposée.

Quant aux valeurs de n qui surpasseroient celle de $\frac{B}{2}$, on en pourra faire abstraction, parce qu'elles ne donneroient point d'équations différentes de celles qui résulteront

des valeurs de n qui ne sont pas $> \frac{B}{2}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'art. 52.

Au reste, comme la condition par laquelle on doit déterminer n est que $n^2 - A$ soit divisible par B , il est clair que chaque valeur de n pourra être également positive ou négative; de sorte qu'il suffira d'essayer successivement pour n tous les nombres naturels qui ne sont pas plus grands que $\frac{B}{2}$, & de prendre ensuite les valeurs satisfaisantes de n tant en plus qu'en moins.

Nous avons donné ailleurs des règles pour faciliter la recherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requise, & même pour trouver ces valeurs *a priori* dans un grand nombre de cas. Voyez les *Mémoires de Berlin pour l'année 1767*, pages 194 & 274.

Résolution de l'équation $Cy - 2nyz + Bz = 1$
en nombres entiers.

On peut résoudre cette équation par deux méthodes différentes que nous allons expliquer.

P R E M I E R E M É T H O D E.

66. Comme les quantités C , n , y , B sont supposées des nombres entiers, & de même que les indéterminées z & x , il est visible que la quantité $Cy - 2nyz + Bz$ sera toujours nécessairement égale à des nombres entiers, par conséquent l'unité sera la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir, à moins qu'elle ne puisse devenir nulle, ce qui ne peut arriver que lorsque cette quantité peut se décomposer en deux facteurs rationnels; comme ce cas n'a aucune difficulté, nous en ferons d'abord abstraction, & la question se réduira à trouver les valeurs de y & z , qui rendront la quantité dont il s'agit la plus petite qu'il est possible; si le minimum est égal à l'unité, on aura la résolution de l'équation proposée, sinon

on fera assuré qu'elle n'admet aucune solution en nombres entiers. Ainsi le problème présent rentre dans le problème III du §. II, & est susceptible d'une solution semblable. Or comme l'on a ici $(2n)^2 - 4BC = 4A$, (art. 61), il faudra distinguer deux cas, suivant que A sera positif ou négatif.

Premier Cas lorsque $n^2 - BC = A < 0$.

67. Suivant la méthode de l'art. 32 il faudra réduire en fraction continue la fraction $\frac{A}{C}$, prise positivement; c'est ce qu'on exécutera par la règle de l'art. 4; ensuite on formera par les formules de l'art. 10 la série des fractions convergentes vers $\frac{n}{C}$, & il n'y aura plus qu'à essayer successivement les numérateurs de ces fractions pour le nombre y , & les dénominateurs correspondans pour le nombre z ; si la proposée est résoluble en nombres entiers, on trouvera de cette manière les valeurs satisfaisantes de y & z ; & réciproquement on sera assuré que la proposée n'admet aucune solution en nombres entiers, si parmi les nombres qu'on

aura effayés il ne s'en trouve point de satisfaisans.

Second Cas lorsque $n - BC = A > 0$.

68. On fera usage ici de la méthode de l'art. 33 & suiv. ainsi, à cause de $E = 4A$, on considérera d'abord la quantité, (article 39),

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

dans laquelle il faudra déterminer les signes tant de la valeur de n , que nous avons vu pouvoir être également positive & négative, que de \sqrt{A} , en sorte qu'elle devienne positive; ensuite on fera le calcul suivant:

$$Q^0 = -n, P^0 = C, \mu < \frac{Q^0 \pm \sqrt{A}}{P^0}$$

$$Q^1 = \mu P^0 + Q^0, P^1 = \frac{Q^1 - A}{P^0}, \mu' < \frac{Q^1 \pm \sqrt{A}}{P^1}$$

$$Q^2 = \mu' P^1 + Q^1, P^2 = \frac{Q^2 - A}{P^1}, \mu'' < \frac{Q^2 \pm \sqrt{A}}{P^2}$$

$$Q^3 = \mu'' P^2 + Q^2, P^3 = \frac{Q^3 - A}{P^2}, \mu''' < \frac{Q^3 \pm \sqrt{A}}{P^3}$$

&c. &c. &c.

& on continuera seulement ces séries jusqu'à ce que deux termes correspondans de la

première & de la seconde série reparoissent ensemble; alors, si parmi les termes de la seconde série P^0, P^1, P^2 &c. il s'en trouve un égal à l'unité positive, ce terme donnera une solution de l'équation proposée, & les valeurs de y & z seront les termes correspondans des deux séries p^0, p^1, p^2 , &c. & q^0, q^1, q^2 , calculées par les formules de l'art. 25; sinon on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. (Voyez l'exemple de l'art. 40.)

Troisième Cas lorsque $A = a$ un carré.

69. Dans ce cas le nombre \sqrt{A} deviendra rationnel, & la quantité $Cy^2 - 2nyz + Bz^2$ pourra se décomposer en deux facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que: celle-ci, $\frac{(Cy - n z)^2 - A z^2}{C}$, laquelle, en supposant $A = a^2$, peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{(Cy + (n+a)z)(Cy + (n-a)z)}{C}.$$

Or comme $n^2 - a^2 = AC = (n+a)(n-a)$, il faudra que le produit de $n+a$ par $\frac{n-a}{n+a}$

soit divisible par C , & par conséquent que l'un de ces deux nombres $n+a$ & $n-a$ soit divisible par un des facteurs de C , & l'autre par le facteur réciproque; supposons donc $C=bc$ & que $n+a=fb$, & $n-a=ge$, f & b étant des nombres entiers, & la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteurs linéaires, $cy \pm fz$ & $by \pm gz$; donc, puisque ces deux facteurs sont égaux à des nombres entiers, il est clair que leur produit ne sauroit être ± 1 ; comme l'équation proposée le demande, à moins que chacun d'eux ne soit en particulier ± 1 ; on fera donc $cy \pm fz = \pm 1$ & $by \pm gz = \pm 1$, & on déterminera par-là les nombres y & z ; si ces nombres se trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entiers.

SECONDE MÉTHODE.

70. Qu'on pratique sur la formule $Cy - 2nyz + Bz^2$ des transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus

haut, (art. 54), & je dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée, telle que

$$Lz^2 - 2M\xi y + N\xi^2,$$

les nombres L , M , N étant des nombres entiers dépendans des nombres donnés C , B , n , en sorte que l'on ait $M^2 - LN = n^2 - CB = A$, & que de plus $2M$ ne soit pas plus grand, (abstraction faite des signes), que le nombre L , ni que le nombre N , les nombres ξ & y seront aussi des nombres entiers; mais dépendans des nombres indéterminés y & z .

En effet soit, par exemple, C moindre que B , & qu'on mette la formule dont il s'agit sous cette forme

$$B'y^2 - 2nyy' + Bz'^2,$$

en faisant $C=B'$ & $z=y'$, si $2n$ n'est pas plus grand que B' , il est clair que cette formule aura déjà d'elle-même les conditions requises; mais si $2n$ est plus grand que B' , alors on supposera $y=my' + y''$, & substituant on aura la transformée

$$B'y'' - 2n'y''y' + B''y',$$

$$\text{où } n'' = n - mB',$$

$$B'' = m'B' - 2mn + B = \frac{n'' - A}{B'}.$$

Or comme le nombre m est indéterminé, on pourra, en le supposant entier, le prendre tel que le nombre $n - mB'$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{2}B'$; alors $2n'$ ne surpassera pas B' . Ainsi, si $2n'$ ne surpassa pas non plus B'' , la transformée précédente sera déjà dans le cas qu'on a en vue; mais si $2n'$ est plus grand que B'' , on continuera alors à supposer $y' = my'' + y'''$, ce qui donnera la nouvelle transformée

$$B'''y'' - 2n'''y''y''' + B''y''y''',$$

$$\text{où } n''' = \frac{1}{2}n'' - m'B'',$$

$$B''' = m'B'' - 2mn' + B' = \frac{n''' - A}{B''}.$$

On déterminera le nombre entier m' , en sorte que $n'' - m'B''$ ne soit pas plus grand que $\frac{B''}{2}$, moyennant quoi $2n'''$ ne surpassera pas B'' ; de sorte que l'on aura

la transformée cherchée, si $2n'''$ ne surpassa pas non plus B''' ; mais si $2n'''$ surpassa B''' , on supposera de nouveau $y'' = my''' + y''''$ &c. &c.

Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car puisque $2n$ est plus grand que B' & que $2n'$ ne l'est pas, il est clair que n' sera moindre que n ; de même $2n'$ est plus grand que B'' , & $2n''$ ne l'est pas; donc n'' sera moindre que n' , & ainsi de suite; de sorte que les nombres n, n', n'' &c. formeront une suite décroissante de nombres entiers, laquelle ne pourra par conséquent pas aller à l'infini. On parviendra donc nécessairement à une formule où le coefficient du terme moyen ne sera pas plus grand que ceux des deux termes extrêmes, & qui aura d'ailleurs les autres propriétés que nous avons énoncées ci-dessus; ce qui est évident par la nature même des transformations pratiquées.

Pour faciliter la transformation de la formule

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

en celle-ci,

$$L\xi^2 - 2M\xi\psi + N\psi^2,$$

je désigne par D le plus grand des deux coefficients extrêmes C & B , & par D' l'autre coefficient; &c, *vice versa*; je désigne par θ la variable dont le carré se trouvera multiplié par D' & par θ' l'autre variable; en sorte que la formule proposée prenne cette forme

$$D'\theta^2 - 2M\theta\theta' + D\theta'^2,$$

où D' soit moindre que D ; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant:

$$m = \frac{n}{D'}, n' = n - mD' \quad D'' = \frac{n^2 - A}{D'}, \theta = m\theta' + \theta''$$

$$m' = \frac{n'}{D''}, n'' = n' - m'D'' \quad D''' = \frac{n'^2 - A}{D''}, \theta' = m'\theta'' + \theta'''$$

$$m'' = \frac{n''}{D'''}, n''' = n'' - m''D''' \quad D'''' = \frac{n''^2 - A}{D'''}, \theta'' = m''\theta''' + \theta''''$$

&c. &c. &c.

où il faut bien remarquer que le signe $\frac{n^2 - A}{D'}$, qui est mis après les lettres n , m' , m'' &c. n'indique pas une égalité parfaite, mais seulement une égalité aussi approchée qu'il est possible,

possible, en tant qu'on n'entend par m , m' , m'' &c. que des nombres entiers. Je n'ai employé ce signe = que faire d'un autre signe convenable.

Ces opérations doivent être continuées jusqu'à ce que dans la série n , n' , n'' &c. on trouve un terme comme n , qui, (abstraction faite du signe); ne surpasse pas la moitié du terme correspondant D' de la série D' , D'' , D''' &c. non plus que la moitié du terme suivant D^{i+1} . Alors on pourra faire $D' = L$, $n' = N$, $D^{i+1} = M$, &c. $\theta' = \psi$, $\theta^{i+1} = \xi$, ou bien $D' = M$, $D^{i+1} = L$ &c. $\theta' = \xi$, $\theta^{i+1} = \psi$. Nous supposons toujours dans la suite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux nombres D' , D^{i+1} .

71. L'équation $Cy^2 - 2ny\zeta + D\zeta^2 = 1$ fera donc réduire à celle-ci,

$$L\xi^2 - 2N\xi\psi + M\psi^2 = 1,$$

où $N^2 - LM = A$, &c. où $2N$ n'est ni $> L$ ni $> M$, (abstraction faite des signes). Or, M étant le plus petit des deux coefficients L & M , qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M , & faisant

Tome II.

O o

$$v = M^* - N\xi,$$

il est clair qu'elle se changera en celle-ci,

$$v^2 - A\xi^2 = M,$$

dans laquelle il faudra maintenant distinguer les deux cas de A positif & de A négatif.

Soit 1°. A négatif & $= -a$; a étant un nombre positif, l'équation sera donc $v^2 + a\xi^2 = M$. Or, comme $N^2 - LM = A$, on aura $a = LM - N^2$; d'où l'on voit d'abord que les nombres L & M doivent être de mêmes signes; d'ailleurs $2N$ ne doit être ni $> L$ ni $> M$; donc N^2 ne sera pas $> \frac{LM}{4}$; donc $a =$ ou $> \frac{1}{4}LM$; & puisque M est supposé moindre que L , ou au moins pas plus grand que L , on aura à plus forte raison $a =$ ou $> \frac{1}{4}M^2$; donc $M =$ ou $< \sqrt{\frac{4a}{3}}$; donc $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$.

On voit par-là que l'équation $v^2 + a\xi^2 = M$ ne sauroit subsister dans l'hypothèse que v & ξ soient des nombres entiers, à moins que l'on ne fasse $\xi = 0$ & $v^2 = M$, ce qui demande que M soit un nombre carré.

Supposons donc $M = \mu^2$, & l'on aura $\xi = 0$, $v = \pm\mu$; donc par l'équation $v = M^* - N\xi$, on aura $\mu^2 = \pm\mu$, & par conséquent $\mu = \pm\frac{1}{\mu}$; de sorte que μ ne sauroit être un nombre entier, comme il le doit, (*hyp.*) à moins que μ ne soit égal à l'unité, soit $= \pm 1$, & par conséquent $M = 1$.

De-là je tire donc cette conséquence, que l'équation proposée ne sauroit être résoluble en nombres entiers, à moins que M ne se trouve égal à l'unité positive. Si cette condition a lieu, alors on fera $\xi = 0$, $\mu = \pm 1$, & on remontera de ces valeurs à celles de y & z .

Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'art. 67, mais elle a sur celle-là l'avantage de n'exiger aucun tâtonnement.

2°. Soit maintenant A un nombre positif, on aura $A = N^2 - LM$; or comme N^2 ne peut pas être plus grand que $\frac{LM}{4}$, il est clair que l'équation ne pourra subsister, à moins que $-LM$ ne soit un nombre positif, c'est-à-dire que L & M ne soient de

signes différens. Ainsi A sera nécessairement $< -LM$, ou tout au plus $= -LM$, si $N=0$; de sorte qu'on aura $-LM=0$ ou $< A$, & par conséquent $M=0$ ou $< A$, ou $M=0$ ou $< \sqrt{A}$.

Le cas de $M=\sqrt{A}$ ne peut avoir lieu que lorsque A est un carré; par conséquent ce cas est très-facile à résoudre par la méthode donnée plus haut, (art. 69).

Reste donc le cas où A n'est pas carré, & dans lequel on aura nécessairement $M < \sqrt{A}$, (abstraction faite du signe de M); alors l'équation $v - A^{\frac{1}{2}} = M$ sera dans le cas du théorème de l'art. 38, & se résoudra par conséquent par la méthode que nous y avons indiquée.

Ainsi il n'y aura qu'à faire le calcul suivant,

$$\begin{aligned} Q^0 &= 0, & P^0 &= 1, & \mu &< \sqrt{A} \\ Q^1 &= \mu, & P^1 &= Q^0 - A, & \mu^1 &< \frac{-Q^0 - \sqrt{A}}{P^1} \\ Q^2 &= \mu^1 P^1 + Q^1, & P^2 &= \frac{Q^1 - A}{P^1}, & \mu^2 &< \frac{-Q^1 + \sqrt{A}}{P^2} \\ Q^3 &= \mu^2 P^2 + Q^2, & P^3 &= \frac{Q^2 - A}{P^2}, & \mu^3 &< \frac{-Q^2 - \sqrt{A}}{P^3} \\ && && & \&c. \&c. \&c. \end{aligned}$$

qu'on continuera jusqu'à ce que deux termes correspondans de la première & de la seconde série reparoissent ensemble, ou bien jusqu'à ce que dans la série P^0, P^1, P^2, P^3 &c. il se trouve un terme égal à l'unité positive, c'est-à-dire $= P^0$; car alors tous les termes suivans reviendront dans le même ordre dans chacune des trois séries, (article 37). Si dans la série P^1, P^2, P^3 &c. il se trouve un terme égal à M , on aura la résolution de l'équation proposée; car il n'y aura qu'à prendre pour v & ξ les termes correspondans des séries P^1, P^2, P^3 &c. Q^1, Q^2, Q^3 &c. calculées d'après les formules de l'art. 25; & même on pourra trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de v & ξ , en continuant à l'infini les mêmes séries.

Or dès qu'on connoîtra deux valeurs de v & ξ , on aura, par l'équation $v = M + N\xi$, celle de φ , laquelle sera aussi toujours égale à un nombre entier; ensuite on pourra remonter de ces valeurs de ξ & φ , c'est-à-dire de θ^{n+1} & θ^n , à celles de θ & θ' , ou bien de y & z , (art. 70).

Mais si dans la série P^0, P^1, P^2 &c. il n'y a aucun terme qui soit $=M$, on en conclura hardiment que l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers.

Il est bon de remarquer que comme la série P^0, P^1, P^2 &c. ainsi que les deux autres, Q^0, Q^1, Q^2 &c. & μ, μ', μ'' &c. ne dépendent que du nombre A ; le calcul une fois fait pour une valeur donnée de A servira pour toutes les équations où A , c'est-à-dire $n^2 - CB$, aura la même valeur; & c'est en quoi la méthode précédente est préférable à celle de l'art. 68, qui exige un nouveau calcul pour chaque équation.

Après tant que A ne passera pas 100, on pourra faire usage de la table que nous avons donnée à l'art. 41, laquelle contient pour chaque radical \sqrt{A} , les valeurs des termes des deux séries P^0, P^1, P^2, P^3, P^4 &c. & μ, μ', μ'', μ''' &c. continues, jusqu'à ce que l'un des termes P^0, P^1, P^2, P^3 &c. devienne $=1$, après quoi tous les termes suivans de l'une & de l'autre série

reviennent dans le même ordre. De sorte qu'on pourra juger sur le champ, par le moyen de cette table, de la résolubilité de l'équation $x^2 - Ax = M$.

De la manière de trouver toutes les solutions possibles de l'Equation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

lorsqu'on n'en connoît qu'une seule.

72. Quoique par les méthodes que nous venons de donner on puisse trouver successivement toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, cependant on peut parvenir à cet objet d'une manière encore plus simple que voici:

Qu'on nomme p & q les valeurs trouvées de y & z , en sorte que l'on ait

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

& qu'on prenne deux autres nombres entiers r & s , tels que $ps - qr = 1$, (ce qui est toujours possible, à cause que p & q sont nécessairement premiers entr'eux), qu'on suppose ensuite

$y = pt + rx$, & $z = qt + su$,
 t & u étant deux nouvelles indéterminées ;
 substituant ces expressions dans l'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

& faisant pour abrégé

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2,$$

$$Q = Cpr - n(pf + qr) + Bqf,$$

$$R = Cr^2 - 2nrf + Bf^2,$$

on aura cette transformée,

$$Pt^2 + 2Qu + Ru^2 = 1.$$

Or on a, (*hyp.*), $P = 1$; de plus si on
 nomme p & q deux valeurs de r & f qui
 satisfassent à l'équation $pf - qr = 1$, on
 aura en général, (art. 42),

$$r = p + mp, f = q + mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; donc
 mettant ces valeurs dans l'expression de Q ,
 elle deviendra

$$Q = Cp^2 - n(pq + qp) + Bq^2 + mP;$$

de sorte que comme $P = 1$, on pourra
 rendre $Q = 0$, en prenant

$$m = -Cp^2 + n(pq + qp) - Bq^2.$$

Maintenant je remarque que la valeur
 de $Q = PR$ se réduit, (après les substitui-

tions & les réductions), à celle-ci, ($n^2 - CB$)
 $(pf - qr)^2$; de sorte que comme $pf - qr$
 $= 1$, on aura $Q = PR = n^2 - CB = A$;
 donc faisant $P = 1$ & $Q = 0$, il viendra
 $-R = A$, savoir $R = -A$; ainsi l'équa-
 tion transformée ci-dessus se changera en
 celle-ci, $t^2 - Au^2 = 1$; or comme y , z ,
 p , q , r & f sont par l'hypothèse des nom-
 bres entiers, il est facile de voir que t & u
 seront aussi des nombres entiers; car, en
 tirant leurs valeurs des équations $y = pt + ru$
 & $z = qt + su$, on a $t = \frac{yz - ru}{p^2 - q^2}$, & $u = \frac{yz - ru}{q^2 - p^2}$,
 c'est-à-dire, à cause de $pf - qr = 1$, $t = sy$
 $- rf$, $u = pz - qy$.

Il n'y aura donc qu'à résoudre en nom-
 bres entiers l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

& chaque valeur de t & de u donnera de
 nouvelles valeurs de y & z .

En effet, substituant dans les valeurs gé-
 nérales de r & f la valeur du nombre m
 trouvée ci-dessus, on aura

$$r = p(1 - Cp^2) - Bpq^2 + np(p^2 + q^2),$$

$$f = q(1 - Bq^2) - Cpq^2 + nq(p^2 + q^2),$$

ou bien, à cause de $Cp - 2npq + Bq^2 = 1$;
 $r = (Bq - np)(qp - pr) = Bq + np$,
 $s = (Cp - nq)(pr - qp) = Cp - nq$.

Donc mettant ces valeurs de r & s dans les expressions ci-dessus de y & z , on aura en général

$$y = pr - (Bq - np)u,$$

$$z = qr + (Cp - nq)u.$$

73. Tout se réduit donc à résoudre l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Or, 1°. si A est un nombre négatif, il est visible que cette équation ne sauroit subsister en nombres entiers, qu'en faisant $u = 0$ & $t = 1$, ce qui donneroit $y = p$ & $z = q$. D'où l'on peut conclure que dans le cas où A est un nombre positif, l'équation proposée, $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, ne peut jamais admettre qu'une seule solution en nombres entiers.

Il en seroit de même, si A étoit un nombre positif carré; car faisant $A = a^2$, on auroit $(t+au)(t-au) = 1$; donc $t+au = \pm 1$, & $t-au = \pm 1$; donc $2au = 0$; donc $u = 0$, & par conséquent $t = \pm 1$.

2°. Mais si A est un nombre positif non-carré, alors l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ est toujours susceptible d'une infinité de solutions en nombres entiers, (art. 37); qu'on peut trouver toutes par les formules données ci-dessus, (art. 71, n°. 2); mais il suffira de trouver les plus petites valeurs de t & u , & pour cela, dès que l'on sera parvenu, dans la série P, P', P'', P''' &c. à un terme égal à l'unité, il n'y aura qu'à calculer par les formules de l'art. 25 les termes correspondans des deux séries p, p', p'', p''' &c. & q, q', q'', q''' &c. ce seront les valeurs cherchées de t & u . D'où l'on voit que le même calcul qu'on aura fait pour la résolution de l'équation $v^2 - Az^2 = M$, servira aussi pour celle de l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Au reste, tant que A ne passe pas 100, on a les plus petites valeurs de t & u toutes calculées dans la table qui est à la fin du chap. VII. du traité préc. & dans laquelle les nombres a, m, n sont les mêmes que ceux que nous appellons ici A, t & u .

74. Désignons par t' & u' les plus petites

valeurs de t , u dans l'équation $t - Au = 1$; & de même que ces valeurs peuvent servir à trouver de nouvelles valeurs de y & z dans l'équation $Cy - xy + Bz = 1$, de même aussi elles pourront servir à trouver de nouvelles valeurs de t & u dans l'équation $t - Au = 1$, qui n'est qu'un cas particulier de celle-là. Pour cela il n'y aura qu'à supposer $C = 1$ & $n = 0$, ce qui donne $-B = A$, & prendre ensuite t , u à la place de y , z , & t , u à la place de p , q . Faisant donc ces substitutions dans les expressions générales de y & z de l'art. 72, & mettant de plus T , V à la place de t , u , on aura en général

$$\begin{aligned} t &= Tt' + AVu', \\ u &= Tu' + Vt', \end{aligned}$$

& pour la détermination de T & V l'équation $T - AV = 1$, qui est semblable à la proposée.

Ainsi on pourra supposer $T = t'$, & $V = u'$, ce qui donnera

$$t = t' + Au', \quad u = t'u' + t'u.$$

Nommant donc t'' , u'' les secondes valeurs de t & u , on aura

$$t'' = t' + Au', \quad u'' = 2t'u'.$$

Maintenant il est clair qu'on peut prendre ces nouvelles valeurs t'' , u'' à la place des premières t' , u' ; ainsi l'on aura

$$\begin{aligned} t &= Tt'' + AVu'', \\ u &= Tu'' + Vt'', \end{aligned}$$

où l'on peut supposer de nouveau $T = t'$, $V = u'$, ce qui donnera

$$t = t't'' + Au'u'', \quad u = t'u'' + u't''.$$

Ainsi on aura de nouvelles valeurs de t & u , lesquelles seront

$$\begin{aligned} t''' &= t't'' + Au'u'' = t'(t' + 3Au'), \\ u''' &= t'u'' + u't'' = u'(3t' + Au'), \end{aligned}$$

& ainsi de suite.

75. La méthode précédente ne fait trouver que successivement les valeurs t'' , t''' &c. u'' , u''' &c. voyons maintenant comment on peut généraliser cette recherche. On a d'abord

$$t = Tt' + AVu', \quad u = Tu' + Vt';$$

d'où je tire cette combinaison,

$t \pm u \sqrt{A} = (t' \pm u' \sqrt{A})(T \pm V \sqrt{A})$;
donc supposant $T = t'$ & $V = u'$, on aura
 $t'' \pm u'' \sqrt{A} = (t' \pm u' \sqrt{A})^2$.

Qu'on mette à présent ces valeurs de t''
& u'' à la place de celles de t' & u' , l'on
aura

$t \pm u \sqrt{A} = (t' \pm u' \sqrt{A})(T \pm V \sqrt{A})$,
où faisant de nouveau $T = t'$ & $u = u'$, &
nommant t''' , u''' les valeurs résultantes de
 t & u , il viendra

$$t''' \pm u''' \sqrt{A} = (t' \pm u' \sqrt{A})^3.$$

On trouvera de même

$$t'' \pm u'' \sqrt{A} = (t' \pm u' \sqrt{A})^4,$$

& ainsi de suite.

Donc, si pour plus de simplicité on nomme maintenant T & V les premières & plus petites valeurs de t , u , que nous avons nommées ci-dessus t' , u' , on aura en général

$$t \pm u \sqrt{A} = (T \pm V \sqrt{A})^m,$$

m étant un nombre quelconque entier positif; d'où l'on tire à cause de l'ambiguïté des signes

$$t = \frac{(T + V \sqrt{A})^m + (T - V \sqrt{A})^m}{2},$$

$$u = \frac{(T + V \sqrt{A})^m - (T - V \sqrt{A})^m}{2 \sqrt{A}}.$$

Quoique ces expressions paroissent sous une forme irrationnelle, cependant il est aisé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développant les puissances de $T \pm V \sqrt{A}$; car on a, comme l'on fait,
 $(T \pm V \sqrt{A})^m = T^m \pm m T^{m-1} V \sqrt{A}$
 $+ \frac{m(m-1)}{2} T^{m-2} V^2 A \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} T^{m-3} V^3 A \sqrt{A} + \&c.$

Donc

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2} A T^{m-2} V^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^2 T^{m-4} V^4 + \&c.$$

$$u = m T^{m-1} V + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} A T^{m-3} V$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} A^2 T^{m-5} V^3 + \&c.$$

où l'on pourra prendre pour m des nombres quelconques entiers positifs.

Il est clair qu'en faisant successivement $m=1, 2, 3, 4$ &c. on aura des valeurs de t & u , qui iront en augmentant.

Or je vais prouver que l'on aura de cette

manière toutes les valeurs possibles de t & u , pourvu que T & V en soient les plus petites. Pour cela il suffit de prouver qu'entre les valeurs de t & u qui répondent à un nombre quelconque m , & celles qui répondroient au nombre suivant $m+1$, il est impossible qu'il se trouve des valeurs intermédiaires qui puissent satisfaire à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Prenons, par exemple, les valeurs t^{m+1} , u^{m+1} , qui résultent de la supposition de $m=3$, & les valeurs t^m , u^m , qui résultent de la supposition $m=4$, & soient, s'il est possible, d'autres valeurs intermédiaires θ & v , qui satisfassent aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Puisque l'on a $t^m - Au^m = 1$, $t^{m+1} - Au^{m+1} = 1$ & $\theta^2 - Av^2 = 1$, on aura $\theta^2 - t^m = A(u^m - v^2)$ & $t^m - \theta^2 = A(u^m - v^2)$, d'où l'on voit que si $\theta > t^m$ & $< t^{m+1}$, on aura aussi $v > u^m$ & $< u^{m+1}$. De plus on aura aussi ces autres valeurs de t & u , savoir $t = \theta t^{m+1} - Av u^{m+1}$, $u = \theta u^{m+1} - v t^{m+1}$, qui satisferont à la même équation $t^2 - Au^2 = 1$, car en les y substituant,

tuant, on auroit $(\theta t^{m+1} - Av u^{m+1})^2 - A(\theta u^{m+1} - v t^{m+1})^2 = (\theta^2 - Av^2)(t^{m+1} - Au^{m+1}) = 1$, équation identique, à cause de $\theta^2 - Av^2 = 1$, & $t^{m+1} - Au^{m+1} = 1$, (hyp.). Or ces deux dernières équations donnent $\theta - v\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$ & $t^{m+1} - u^{m+1}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{m+1} + u^{m+1}\sqrt{A}}$; donc mettant, dans l'expression de $u = \theta u^{m+1} - v t^{m+1}$, à la place de θ , $v\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$, & à la place de t^{m+1} , $u^{m+1}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{m+1} + u^{m+1}\sqrt{A}}$, on aura

$$u = \frac{u^{m+1}}{\theta + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{m+1} + u^{m+1}\sqrt{A}}$$

de même, si on considère la quantité $t^{m+1} - u^{m+1}\sqrt{A}$, elle pourra aussi, à cause de $t^2 - Au^2 = 1$, se mettre sous la forme

$$\frac{u^{m+1}}{t^{m+1} + u^{m+1}\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{m+1} + u^{m+1}\sqrt{A}}$$

Or il est facile de voir que la quantité précédente doit être plus petite que celle-ci, à cause de $\theta > t^{m+1}$ & $u > u^{m+1}$, donc on aura une valeur de u , qui sera moindre

que la quantité, $t^{iii}u^{iv} - u^{iii}t^{iv}$, mais cette quantité est égale à V ; car

$$t^{iii} = \frac{(T+V\sqrt{A})^3 + (T-V\sqrt{A})^3}{2},$$

$$t^{iv} = \frac{(T+V\sqrt{A})^4 + (T-V\sqrt{A})^4}{2},$$

$$u^{iii} = \frac{(T+V\sqrt{A})^3 - (T-V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$u^{iv} = \frac{(T+V\sqrt{A})^4 - (T-V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}};$$

$$\text{d'où } t^{iii}u^{iv} - t^{iv}u^{iii} = \frac{(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^4 - (T-V\sqrt{A})^4(T+V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}}$$

de plus

$$(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^3 = (T-AV)^3 = 1, \text{ puisque } T-AV=1, (\text{hypoth.});$$

donc $(T-V\sqrt{A}) \times (T+V\sqrt{A}) = T+V\sqrt{A}$,
 & $(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^3 = T-V\sqrt{A}$;
 de sorte que la valeur de $t^{iii}u^{iv} - u^{iii}t^{iv}$ se réduira à $\frac{2V\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} = V$.

Il s'ensuivroit donc de-là qu'on auroit une valeur de $u < V$, ce qui est contre l'hypothèse, puisque V est supposé la plus petite valeur possible de u . Donc il ne

fauroit y avoir de valeurs de t & u intermédiaires entre celles-ci, t^{iii} , t^{iv} & u^{iii} , u^{iv} . Et comme ce raisonnement peut s'appliquer en général à toutes valeurs de t & u qui résulteroient des formules ci-dessus, en y faisant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs possibles de t & u .

Au reste il est inutile de remarquer que les valeurs de t & de u peuvent être également positives ou négatives; car cela est visible par l'équation même $t^{iii} - Au^{iii} = 1$.

De la maniere de trouver toutes les solutions possibles, en nombres entiers, des Equations indéterminées du second degré à deux inconnues.

76. Les méthodes que nous venons d'exposer suffisent pour la résolution complète des équations de la forme $Ay^2 + B = x^2$; mais il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations du second degré d'une forme plus composée; c'est pourquoi nous croyons

devoir montrer comment il faudra s'y prendre.

Soit proposée l'équation

$$ar^2 + brf + cf^2 + dr + ef + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f soient des nombres entiers donnés, & où r & f soient deux inconnues qui doivent être aussi des nombres entiers.

J'aurai d'abord, par la résolution ordinaire,

$$\begin{aligned} 2ar + bf + d \\ = \sqrt{((bf + d)^2 - 4a(cf^2 + ef + d))}, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que la difficulté se réduit à faire en sorte que

$$(bf + d)^2 - 4a(cf^2 + ef + d)$$

soit un carré.

Supposons pour plus de simplicité

$$b^2 - 4ac = A,$$

$$bd - 2ae = g,$$

$$d^2 - 4af = h,$$

& il faudra que $Af^2 + 2gdf + h$ soit un carré; supposons ce carré $= y^2$, en sorte que l'on ait l'équation

$$Af^2 + 2gdf + h = y^2;$$

& tirant la valeur de f , on aura

$$Af + g = \sqrt{(Ay^2 + g^2 - Ah)};$$

de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre carrée la formule $Ay^2 + g^2 - Ah$.

Donc si on fait encore

$$g^2 - Ah = B,$$

on aura à rendre rationnel le radical

$$\sqrt{(Ay^2 + B)};$$

c'est à quoi on parviendra par les méthodes données.

Soit $\sqrt{(Ay^2 + B)} = x$, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$Ay^2 + B = x^2,$$

l'on aura donc $Af + g = \pm x$; d'ailleurs on a déjà $2ar + bf + d = \pm y$; ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x & y , on aura celles de r & f par les deux équations

$$f = \frac{\pm x - g}{A},$$

$$r = \frac{\pm y - d - bf}{2a}.$$

Or comme r & f doivent être des nombres entiers, il est visible qu'il faudra 1°. que x & y soient des nombres entiers aussi; 2°. que $\pm x - g$ soit divisible par A , &

qu'ensuite $\pm y - d - b f$ le soit par 2a. Ainsi, après avoir trouvé toutes les valeurs possibles de x & y en nombres entiers, il restera encore à trouver parmi ces valeurs, celles qui pourront rendre r & f des nombres entiers.

Si A est un nombre négatif ou un nombre positif carré, nous avons vu que le nombre des solutions possibles en nombres entiers est toujours limité; de sorte que dans ces cas il n'y aura qu'à essayer successivement pour x & y les valeurs trouvées, & si l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r & f des nombres entiers, on en conclura que l'équation proposée n'admet point de solution de cette espèce.

La difficulté ne tombe donc que sur le cas où A est un nombre positif non-carré, dans lequel on a vu que le nombre des solutions possibles en entiers peut être infini; comme l'on auroit dans ce cas un nombre infini de valeurs à essayer, on ne pourroit jamais bien juger de la résolubilité de l'équation proposée, à moins d'avoir une

regle qui réduise le tâtonnement entre certaines limites; c'est ce que nous allons rechercher.

77. Puisqu'on a, (art. 65), $x = ny - B_1$; & (art. 71), $y = pt - (Bq - np)u$, & $z = qt + (Cp - nq)u$, il est facile de voir que les expressions générales de r & f seront de cette forme,

$$r = \frac{at + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad f = \frac{a't + \beta' u + \gamma'}{\delta'},$$

$a, \beta, \gamma, \delta, a', \beta', \gamma', \delta'$ étant des nombres entiers connus, & t, u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans lesquelles l'exposant m peut être un nombre entier positif quelconque; ainsi la question se réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m , pour que les valeurs de r & f soient des nombres entiers.

78. Je remarque d'abord qu'il est toujours possible de trouver une valeur de u qui soit divisible par un nombre quelconque donné Δ ; car supposant $u = \Delta w$, l'équation $r - Au = 1$ deviendra $r - A\Delta w = 1$, laquelle est toujours résoluble en nombres

entiers, & l'on trouvera les plus petites valeurs de t & u , en faisant le même calcul qu'auparavant, mais en prenant $A\Delta^2$ à la place de A ; or, comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, elles feront nécessairement renfermées dans les formules de l'art. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par Δ .

Qu'on dénote cette valeur de m par μ , & je dis que si dans les expressions générales de t & u de l'article cité on fait $m = 2\mu$, la valeur de u sera divisible par Δ , & celle de t étant divisée par Δ donnera 1 pour reste.

Car si on désigne par T & V les valeurs de t & u , où $m = \mu$, & par T' & V' celles où $m = 2\mu$, on aura, (art. 75),
 $T \pm V\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^\mu$, &
 $T' \pm V'\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu}$; donc
 $(T \pm V\sqrt{A})' = (T' \pm V'\sqrt{A})$,
 c'est-à-dire en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, & l'irrationnelle avec l'irrationnelle

$T' = T' + AV'$, & $V' = 2TV'$; donc, puisque V' est divisible par Δ , V' le sera aussi, & T' laissera le même reste que laisseroit T ; mais on a $T' - AV' = 1$, (hyp.) donc $T' - 1$ doit être divisible par Δ & même par Δ^2 , puisque V' l'est déjà; donc T' & par conséquent aussi T' étant divisé par Δ , laissera le reste 1.

Maintenant je dis que les valeurs de t & u qui répondent à un exposant quelconque m , étant divisées par Δ , laisseront les mêmes restes que les valeurs de t & u , qui répondroient à l'exposant $m + 2\mu$. Car désignant ces dernières par θ & v , on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m,$$

$$\text{ \& } \theta \pm v\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu};$$

donc

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

mais nous venons de trouver ci-dessus

$$T' \pm V'\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc on aura

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T' \pm V'\sqrt{A}),$$

d'où l'on tire, en faisant la multiplication

& comparant ensuite les parties rationnelles ensemble & les irrationnelles ensemble,

$$\theta = tT'' + AuV'', v = tV'' + uT''.$$

Or V'' est divisible par Δ , & T'' laisse le reste 1; donc θ laissera le même reste que t , & v le même reste que u .

Donc en général les restes des valeurs de t & u répondantes aux exposans $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$, &c. seront les mêmes que ceux des valeurs qui répondent à l'exposant quelconque m .

De-là on peut donc conclure que si l'on veut avoir les restes provenans de la division des termes t' , t'' , t''' &c. & u' , u'' , u''' &c. qui répondent à $m=1, 2, 3$ &c. par le nombre Δ , il suffira de trouver ces restes jusqu'aux termes $t^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$ inclusivement; car, après ces termes, les mêmes restes reviendront dans le même ordre, & ainsi de suite à l'infini.

Quant aux termes $t^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$, auxquels on pourra s'arrêter, ce seront ceux dont l'un $u^{2\mu}$ sera exactement divisible par Δ , & dont l'autre $t^{2\mu}$ laissera l'unité pour reste;

ainsi il n'y aura qu'à pousser les divisions jusqu'à ce qu'on parvienne aux restes 1 & 0; alors on sera assuré que les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes que l'on a déjà trouvés.

On pourroit aussi trouver l'exposant 2μ *à priori*; car il n'y auroit qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n°. 2, premièrement pour le nombre A , & ensuite pour le nombre $A\Delta^2$; & si on nomme π le numéro du terme de la série P' , P'' , P''' &c. qui dans le premier cas sera $=1$, & ρ le numéro du terme qui sera $=1$ dans le second cas, on n'aura qu'à chercher le plus petit multiple de π & de ρ , lequel étant divisé par π , donnera la valeur cherchée de μ .

Ainsi si l'on a, par exemple, $A=6$ & $\Delta=3$, on trouvera dans la table de l'article 41 pour le radical $\sqrt{6}$, $P^0=1$, $P^1=-2$, $P^2=1$; donc $\pi=2$; ensuite on trouvera dans la même table pour le radical $\sqrt{(6.9)}=\sqrt{54}$, $P^0=1$, $P^1=-5$, $P^2=9$, $P^3=-2$, $P^4=9$, $P^5=-5$, $P^6=1$; donc $\rho=6$; or le plus petit mul-

tipie de 2 & 6 est 6, qui étant divisé par 2 donne 3 pour quotient, de sorte qu'on aura ici $\mu=3$ & $2\mu=6$.

Donc, pour avoir dans ce cas tous les restes de la division des termes v' , v'' , v''' &c. & u' , u'' , u''' &c. par 3, il suffira de chercher ceux des six premiers termes de l'une & de l'autre série; car les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes, c'est-à-dire que les septièmes termes donneront les mêmes restes que les premiers, les huitièmes les mêmes restes que les seconds, & ainsi de suite à l'infini.

Au reste il peut arriver quelquefois que les termes v^{μ} & u^{μ} aient les mêmes propriétés que les termes $v^{2\mu}$ & $u^{2\mu}$, c'est-à-dire que v^{μ} soit divisible par Δ , & que u^{μ} laisse l'unité pour reste. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les restes des termes suivans $v^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$ &c. $v^{\mu+2}$, $u^{\mu+3}$ &c. seront les mêmes que ceux des termes v' , v'' , &c. u' , u'' , &c. & ainsi des autres.

En général nous désignerons par M la

plus petite valeur de l'exposant m , qui rendra $v-1$ & u divisibles par Δ .

79. Supposons maintenant que l'on ait une expression quelconque composée de v & u & de nombres entiers donnés, de manière qu'elle représente toujours des nombres entiers, & qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudroit donner à l'exposant m , pour que cette expression devint divisible par un nombre quelconque donné Δ , il n'y aura qu'à faire successivement $m=1$, 2, 3 &c. jusqu'à M ; & si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par Δ , on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir, quelques valeurs qu'on donne à m .

Mais si l'on trouve de cette manière une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par Δ , alors nommant N chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m qui pourront faire le même effet, seront N , $N+M$, $N+2M$, $N+3M$ &c. & en général $N+\lambda M$, λ étant un nombre entier quelconque.

De même, si l'on avoit une autre expression composée de même de r , u & de nombres entiers donnés, laquelle dût être en même temps divisible par un autre nombre quelconque donné N' , on chercheroit pareillement les valeurs convenables de M & de N , que nous désignerons ici par M' & N' , & toutes les valeurs de l'exposant m qui pourrout satisfaire à la condition proposée, seront renfermées dans la formule $N'^m + \lambda' M'$, λ' étant un nombre quelconque entier. Ainsi il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers λ & λ' , pour que l'on ait $N + \lambda M = N' + \lambda' M'$, savoir

$$M\lambda - M'\lambda' = N' - N,$$

équation résoluble par la méthode de l'article 42.

Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $\alpha r + \beta u + \gamma$, $\alpha' r + \beta' u + \gamma'$, & les diviseurs sont δ & δ' .

Il faudra seulement se souvenir de prendre

les nombres r & u successivement en plus & en moins, pour avoir tous les cas possibles.

REMARQUE.

80. Si l'équation proposée à résoudre en nombres entiers étoit de la forme

$$ar^2 + 2brf + cf^2 = f,$$

on y pourroit appliquer immédiatement la méthode de l'art. 65; car 1°. il est visible que r & f ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que le nombre f ne fût en même temps divisible par le carré de ce diviseur; de sorte qu'on pourroit toujours réduire la question au cas où r & f seroient premiers entr'eux. 2°. On voit aussi que f & f ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que ce diviseur n'en fût un aussi du nombre a , en supposant a premier à f ; ainsi on pourroit réduire encore la question au cas où f & f seroient premiers entr'eux. (Voyez l'art. 64).

Or f étant supposé premier à f & à r , on pourra faire $r = rf - f\gamma$, & il faudra,

pour que l'équation soit résoluble en nombres entiers, qu'il y ait une valeur de n positive ou négative pas plus grande que $\frac{f}{2}$, laquelle rende la quantité $an^2 + 2bn + c$ divisible par f . Cette valeur étant mise à la place de n , toute l'équation deviendra divisible par f , & se trouvera réduite au cas de celle de l'art. 66 & suiv.

Il est facile de voir que la même méthode peut servir à réduire toute équation de la forme

$ax^m + bx^{m-1}f + cx^{m-2}f^2 + \dots + kx^m = b$,
 a, b, c &c. étant des nombres entiers donnés, & r & f deux indéterminées qui doivent être aussi des nombres entiers, en une autre équation semblable, mais dans laquelle le terme tout connu soit l'unité, & alors on y pourra appliquer la méthode générale du §. II. Voy. la remarque de l'art. 30.

E X E M P L E I.

81. Soit proposé de rendre rationnelle cette quantité,

$$\sqrt{(30 + 62f - 7f^2)},$$

en

en ne prenant pour f que des nombres entiers; on aura donc à résoudre cette équation

$$30 + 62f - 7f^2 = y^2,$$

laquelle étant multipliée par 7, peut se mettre sous cette forme,

$$7 \cdot 30 + (31)^2 - (7f - 31)^2 = 7y^2,$$

ou bien en faisant $7f - 31 = x$, & transposant

$$x^2 = 1171 - 7y^2, \text{ ou } x^2 + 7y^2 = 1171.$$

Cette équation est donc maintenant dans le cas de l'article 64; de sorte qu'on aura $A = -7$ & $B = 1171$; d'où l'on voit d'abord que y & B doivent être premiers entr'eux, puisque ce dernier nombre ne renferme aucun facteur carré.

On fera, suivant la méthode de l'art. 64, $x = ny - 1171$, & il faudra, pour que l'équation soit résoluble, que l'on puisse trouver pour n un nombre entier positif ou négatif non $> \frac{B}{A}$, c'est-à-dire non > 180 , tel que $n^2 - A$ ou $n^2 + 7$ soit divisible par B ou par 1171.

Je trouve $n = 1321$, ce qui donne $n^2 + 7$

Tome II.

Q q

$\equiv 1171 \times 88$; ainsi je substitue dans l'équation précédente $\pm 321y \equiv 1171z$ à la place de x , moyennant quoi elle se trouve toute divisible par 1171, & la division faite, elle devient $88y \mp 642yz \mp 1171z^2 \equiv 1$.

Pour résoudre cette équation je vais faire usage de la seconde méthode exposée dans l'art. 76; parce qu'elle est en effet plus simple & plus commode que la première. Or comme le coefficient de y est plus petit que celui de z , j'aurai ici $D \equiv 1171$, $D'' \equiv 88$ & $n \equiv \pm 321$; donc retenant pour plus de simplicité la lettre y à la place de z , & mettant y' à la place de z , je ferai le calcul suivant, où je supposerai d'abord $n \equiv 321$:

$$m = \frac{321}{88} = 4, \quad n'' = 321 - 4 \cdot 88 = -31,$$

$$m' = \frac{-31}{11} = -3, \quad n''' = -31 + 3 \cdot 11 = 2,$$

$$m'' = \frac{2}{1} = 2, \quad n'''' = 2 - 2 \cdot 1 = 0,$$

$$D'' = \frac{31^2 + 7}{88} = 11, \quad y = 4y' + y'',$$

$$D''' = \frac{4 + 7}{11} = 1, \quad y' = -3y'' + y''',$$

$$D'''' = \frac{7}{1} = 7, \quad y' = 2y'' + y'''.$$

Puisque $n''' = 0$ & par conséquent $< \frac{D'''}{2}$

& $< \frac{D''}{2}$, on s'arrêtera ici & on fera

$$D''' = M = 1, \quad D'' = L = 7, \quad n''' = 0 = N,$$

& $y''' = \xi$, $y'' = \varphi$, à cause que D''' est $< D''$.

Maintenant je remarque que A étant $\equiv -7$, & par conséquent négatif, il faut, pour la résolubilité de l'équation, que l'on ait $M \equiv 1$; c'est ce que l'on vient de trouver; de sorte qu'on en peut conclure d'abord que la résolution est possible. On supposera donc $\xi \equiv y''' = 0$, $\varphi \equiv y'' = \pm 1$; & l'on aura, par les formules ci-dessus, $y' = \pm 1$, $y' = \mp 3 = 7$, $y = \mp 12 \pm 1 = \mp 11$, les signes ambigus étant à volonté. Donc $x \equiv 321y - 1171z = \mp 18$, & conséquemment $f \equiv \frac{x + 31}{7} \equiv \frac{31 + 18}{7} = \frac{49}{7} = 7$, ou $\equiv \frac{49}{7} = 7$. Or comme on exige que la valeur de f soit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $f \equiv 7$.

Il est remarquable que l'autre valeur de f , savoir $\frac{13}{7}$, quoique fractionnaire, donne

Q q ij

néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical $\sqrt{(30+62f-7f^2)}$, & le même nombre 11 que donne la valeur $f=7$; de sorte que ces deux valeurs de f seront les racines de l'équation $30+62f-7f^2=121$.

Nous avons supposé ci-dessus $n=321$; or on peut faire également $n=-321$; mais il est facile de voir d'avance que tout le changement qui en résultera dans les formules précédentes, c'est que les valeurs de m , m' , m'' , &c de n , n' , n'' , changeront de signe, moyennant quoi les valeurs de y' &c de y deviendront aussi de différens signes, ce qui ne donnera aucun nouveau résultat, puisque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le signe ambigu \pm .

Il en sera de même dans tous les autres cas; de sorte qu'on pourra toujours se dispenser de prendre successivement la valeur de n en plus &c en moins.

La valeur $f=7$ que nous venons de trouver, résulte de la valeur de $n=\pm 321$; on pourroit trouver d'autres valeurs de f , si on trouvoit d'autres valeurs de n qui

eussent la condition requise; mais comme le diviseur $B=1171$ est un nombre premier, il ne sauroit y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité, comme nous l'avons démontré ailleurs, (*Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pag. 194*), d'où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question.

J'avoue au reste qu'on peut résoudre le problème précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement; car dès qu'on est parvenu à l'équation $x^2=1171-7y^2$, il n'y aura qu'à essayer pour y tous les nombres entiers dont les carrés multipliés par 7 ne surpasseront pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $< \sqrt{\frac{1171}{7}} < 13$.

Il en est de même de toutes les équations où A est un nombre négatif; car dès qu'on est arrivé à l'équation $x^2=B \pm Ay^2$, où, (en faisant $A=-a$), $x^2=B-ay^2$, il est clair que les valeurs satisfaisantes de y , s'il y en a, ne pourront se trouver que parmi les nombres $< \sqrt{\frac{B}{a}}$. Aussi n'ai-je donné des méthodes particulières pour le cas de A

négalif, que parce que ces méthodes ont une liaifon intime avec celles qui concernent le cas de A positif, & que toutes ces méthodes étant ainfi rapprochées les unes des autres, peuvent fe prêter un jour mutuel & acquérir un plus grand degré d'évidence.

E X E M P L E I I.

82. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de A positif, & foit propofé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour y , en forte que la quantité radicale,

$$\sqrt{(13y^2 + 101)},$$

devienne rationnelle.

On aura ici, (art. 64), $A=13$, $B=101$, & l'équation à réfoudre en entiers fera

$$x^2 - 13y^2 = 101,$$

dans laquelle, à caufe que 101 n'est divisible par aucun carré, y fera néceffairement premier à 101.

On fera donc, (art. 65), $x=ny-101z$, & il faudra que n^2-13 foit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{3} < 51$.

Je trouve $n=35$, ce qui donne $n^2=1225$ & $n^2-13=1212=101 \times 12$; ainfi on pourra prendre $n=\pm 35$, & fubftituant, au lieu de x , $\pm 35y-101z$, on aura une équation toute divisible par 101, & qui, la divifion faite, fera

$$12y^2 \mp 70yz + 101z^2 = 1.$$

Emplions encore, pour réfoudre cette équation, la méthode de l'art. 78; faifons $D'=12$, $D''=101$, $n=\pm 35$; mais au lieu de la lettre n nous confervons la lettre y , & nous changerons feulement z en y' , comme dans l'exemple précédent.

Soit, 1^o , $n=35$, on fera le calcul fuivant:

$$m = \frac{25}{12} = 2, \quad n' = 35 - 3 \cdot 12 = -1, \quad y' = y'' + y''$$

$$m' = \frac{-1}{-1} = 1, \quad n'' = -1 + 1 = 0, \quad D'' = \frac{-13}{-1} = 13, \quad y' = y'' + y''$$

Comme $n''=0$ & conféquemment $\frac{D''}{2}$

& $\frac{D''}{2}$, on s'arrêtera ici & l'on aura

la transformée

$$D'''y''^2 - 2n''y''y''' + D''y'''^2 = 1,$$

ou bien

$$13y'' - y''' = 1,$$

laquelle étant réduite à cette forme

$$y''' - 13y'' = -1,$$

sera susceptible de la méthode de l'art. 71, n°. 2; & comme $A=13$ est < 100 , on pourra faire usage de la table de l'art. 41.

Ainsi il n'y aura qu'à voir si dans la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{13}$, il se trouve le nombre 1 dans une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente soit résoluble, que dans la série P^0, P^1, P^2 &c. il se trouve un terme $= -1$, mais on a $P^0=1, P^1=4, P^2=3$ &c. donc &c. or dans la série 1, 4, 3, 3, 4, 1 &c. on trouve justement 1 à la sixième place, en sorte que $P^5=-1$; donc on aura une solution de l'équation proposée, en prenant $y'''=P^5$, & $y''=q^5$, les nombres P^5, q^5 étant calculés d'après les formules de l'art. 25, en donnant à μ, μ', μ'' &c. les valeurs 3, 1, 1, 1, 1, 6 &c. qui forment la série inférieure des nombres répondans à $\sqrt{13}$ dans la même table.

On aura donc

$$P^0=1, \quad q^0=0$$

$$P^1=3, \quad q^1=1$$

$$P^2=P^1+P^0=4, \quad q^2=q^1=1$$

$$P^3=P^2+P^1=7, \quad q^3=q^2+q^1=2$$

$$P^4=P^3+P^2=11, \quad q^4=q^3+q^2=3$$

$$P^5=P^4+P^3=18, \quad q^5=q^4+q^3=5.$$

$$\text{Donc } y'''=18 \text{ \& } y''=5; \text{ donc } y'=y''$$

$$+y'''=23, \text{ \& } y=3y'+y''=74.$$

Nous avons supposé ci-dessus $n=35$, mais on peut aussi prendre $n=-35$.

Soit donc, 2°. $n=-35$, on fera

$$m=\frac{-35}{12}=-3, \quad n=-35+3, 12=1, \quad D^0=\frac{1-13}{12}=-1, \quad y=-3y'+y''$$

$$m'=\frac{-1}{-1}=1, \quad n'=-1, \quad n'=-1=0, \quad D^0=\frac{-13}{-1}=13, \quad y'=y''+y'''$$

ainsi on aura les mêmes valeurs de D^1, D^2 &c. qu'auparavant, de sorte que la transformation en y'' & y''' sera aussi la même.

On aura donc aussi $y'''=18$ & $y''=5$, donc $y'=y''+y'''=23$, & $y=-3y'+y''=-64$.

Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correspondantes de y' ou z ; & ces valeurs résultent de la sup-

position de $n = \pm 3$; or comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises, il s'ensuit que les valeurs précédentes seront les seules valeurs primitives que l'on puisse avoir, mais on pourra ensuite en trouver une infinité de dérivées par la méthode de l'art. 72.

Prenant donc des valeurs de y & z pour p & q , on aura en général, (art. cité);

$$y = 74t - (101.23 - 35.74)u = 74t + 267u \\ z = 23t + (12.74 - 35.23)u = 23t + 83u \\ \text{ou}$$

$$y = -34t - (101.13 - 35.34)u = -34t - 123u \\ z = 13t + (-12.34 + 35.13)u = 13t + 47u \\ \text{\& il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de } t \\ \text{\& } u \text{ de l'équation } t^2 - 2213u^2 = 1; \text{ or ces va-} \\ \text{leurs se trouvent déjà toutes calculées dans} \\ \text{la table qui est à la fin du chap. VII du} \\ \text{traité précédent; on aura donc sur le champ} \\ t = 649 \text{ \& } u = 180; \text{ de sorte que prenant} \\ \text{ces valeurs pour } T \text{ \& } V \text{ dans les formules} \\ \text{de l'art. 77, on aura en général}$$

$$t = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m + (649 - 180\sqrt{13})^m}{2}$$

$$u = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^m - (649 - 180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

où l'on pourra donner à m telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs.

Or comme les valeurs de t & u peuvent être prises tant en plus qu'en moins, les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question, seront toutes renfermées dans ces deux formules,

$$y = \pm 74t \pm 267u, \\ = \pm 34t \pm 123u,$$

les signes ambigus étant à volonté.

Si on fait $m = 0$, on aura $t = 1$ & $u = 0$; donc $y = \pm 74$; où $= \pm 34$; & cette dernière valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le problème.

Nous avons déjà résolu ce même problème dans les *Mémoires de Berlin pour l'année 1768*, pag. 243; mais comme nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente, & qui revient au même pour le fond que la première méthode de l'art. 66 ci-dessus, nous avons cru

devoir le redonner ici, pour que la comparaison des résultats qui sont les mêmes par l'une & l'autre méthode, puisse leur servir de confirmation, s'il en est besoin.

EXEMPLE II.

83. Soit proposé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y , rendent rationnelle la quantité

$$\sqrt{(79y^2 + 101)}.$$

On aura donc à résoudre en entiers l'équation

$$x^2 - 79y^2 = 101,$$

dans laquelle y sera premier à 101, puisque ce nombre ne renferme aucun facteur carré.

Qu'on suppose donc $x = ny - 101$, & il faudra que $n^2 - 79$ soit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{2} < 51$; on trouve $n = 33$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1010 = 101 \times 10$; ainsi on pourra prendre $n = \pm 33$, & ces valeurs seront les seules qui aient la condition requise.

Substituant donc $\pm 33y - 101$ à la place

de x , & divisant toute l'équation par 101, on aura cette transformée

$$10y^2 + 66yz + 101z^2 = 1.$$

On fera donc $D' = 10$, $D'' = 101$, $n = \pm 33$, & prenant d'abord n en plus, on opérera comme dans l'exemple précédent; on aura ainsi

$$m = \frac{23}{10} = 3, n = 33 - 3 \cdot 10 = 3, D'' = \frac{9-79}{10} = -7, y = 3y' + y'',$$

$$\text{Or comme } n' = 3 \text{ est déjà } < \frac{D'}{2} \text{ \& } < \frac{D''}{2},$$

il ne sera pas nécessaire d'aller plus loin; ainsi on aura la transformée

$$-7y'^2 - 6y'y'' + 10y''^2 = 1,$$

laquelle étant multipliée par -7 , pourra se mettre sous cette forme,

$$(7y' + 3y'')^2 - 79y''^2 = -7.$$

Puisque donc 7 est $< \sqrt{79}$, si cette équation est résoluble, il faudra que le nombre 7 se trouve parmi les termes de la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{79}$ dans la table de l'art. 41, & même que ce nombre 7 y occupe une place paire, puisqu'il a le signe $-$. Mais la série dont

il s'agit ne renferme que les nombres 1, 15, 2, qui reviennent toujours; donc on doit conclure sur le champ que la dernière équation n'est pas résoluble, & qu'ainsi la proposée ne l'est pas, au moins d'après la valeur de $n=33$.

Il ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $n=33$, laquelle donnera

$$m = \frac{-33}{10} = -3, \quad n = -33 + 3, \quad 10 = -3, \quad D'' = \frac{2-79}{10} = -7, \quad y = -3y' \cdot y''$$

de sorte qu'on aura cette autre transformée,

$$-7y' + 6y'y'' + 10y''^2 = 1,$$

laquelle se réduit à la forme

$$(7y' - 3y'')^2 - 79y''^2 = -7,$$

qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

R E M A R Q U E.

84. M. Euler, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des *nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, trouve par induction cette règle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme

$x^2 - Ay^2 = B$, lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $4An + r^2$, ou $4An + r^2 - A$; mais l'exemple précédent met cette règle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $4An + r^2 - A$, en faisant $A=79$, $n=-4$ & $r=38$; cependant l'équation $x^2 - 79y^2 = 101$ n'admet aucune solution en nombres entiers.

Si la règle précédente étoit vraie, il s'en suivroit que si l'équation $x^2 - Ay^2 = B$ est possible lorsque B a une valeur quelconque b , elle le seroit aussi en prenant $B=4An + b$, pourvu que B fût un nombre premier. On pourroit limiter cette dernière règle, en exigeant que b fût aussi un nombre premier; mais avec cette limitation même elle se trouveroit démentie par l'exemple précédent; car on a $101=4An+b$, en prenant $A=79$, $n=-2$ & $b=733$; or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant $x=38$ & $y=3$; cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

PARAGRAPHE VIII.

Remarques sur les Equations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

Et sur la maniere ordinaire de les résoudre
 en nombres entiers.

85. LA méthode du chap. VII du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espece, est la même que celle que M. Wallis donne dans son Algebre, (chap. XCVIII), & qu'il attribue à Milord Brounker; on la trouve aussi dans l'Algebre de M. Ozanam, qui en fait honneur à M. de Fermat. Quoi qu'il en soit de l'Inventeur de cette méthode, il est au moins certain que M. de Fermat est l'Auteur du probleme qui en fait l'objet; il l'avoit proposé comme un défi à tous les Géometres Anglois, ainsi qu'on le voit par le *commercium epistolicum* de M. Wallis; c'est ce qui donna occasion à Milord Brounker d'inventer la méthode dont nous parlons; mais il ne paroît pas que

cet

cet Auteur ait connu toute l'importance du probleme qu'il avoit résolu; on ne trouve même rien sur ce sujet dans les écrits qui nous sont restés de M. Fermat, ni dans aucun des Ouvrages du siecle passé, où l'on traite de l'Analyse indéterminée. Il est bien naturel de croire que M. Fermat, qui s'étoit principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très-beaux théoremes, avoit été conduit au probleme dont il s'agit par les recherches qu'il avoit faites sur la résolution générale des équations de la forme $x^2 = Ay^2 + B$, auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues; cependant ce n'est qu'à M^r. Euler que nous devons la remarque que ce probleme est nécessaire pour trouver toutes les solutions possibles de ces sortes d'équations. (Voyez le chap. VI ci-dessus, le tome VI des anciens Commentaires de Pétersbourg, & le tome IX des nouveaux).

La méthode que nous avons suivie pour démontrer cette proposition est un peu dif-

Tome II.

R r

férente de celle de *M. Euler*, mais aussi est-elle, si je ne me trompe, plus directe & plus générale. Car d'un côté la méthode de *M. Euler* conduit naturellement à des expressions fractionnaires lorsqu'il s'agit de les éviter, & de l'autre on ne voit pas clairement que les suppositions qu'on y fait pour faire disparaître les fractions, soient les seules qui puissent avoir lieu. En effet nous avons fait voir ailleurs qu'il ne suffit pas toujours de trouver une seule solution de l'équation $x = Ay + B$, pour pouvoir en déduire toutes les autres, à l'aide de l'équation $p = Aq + 1$; & qu'il peut y avoir souvent, au moins lorsque B n'est pas un nombre premier, des valeurs de x & y qui ne sauroient être renfermées dans les expressions générales de *M. Euler*. (Voy. l'art. 45 de mon *Mémoire sur les problèmes indéterminés*, dans les *Mémoires de Berlin*, année 1767).

Quant à la méthode de résoudre les équations de la forme $p = Aq + 1$, il nous semble que celle du chap. VII, quelque

ingénieuse qu'elle soit, est encore assez imparfaite. Car, 1°. elle ne fait pas voir que toute équation de ce genre est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque a est un nombre positif non-carré. 2°. Il n'est pas démontré qu'elle doive faire parvenir toujours à la résolution cherchée. *M. Wallis* a , à la vérité, prétendu prouver la première de ces deux propositions; mais sa démonstration n'est, si j'ose le dire, qu'une simple pétition de principe. (Voy. le chap. XCIX de son *Algebre*). Je crois donc être le premier qui en ait donné une tout-à-fait rigoureuse; elle se trouve dans les *Mélanges de Turin*, tome IV; mais elle est très-longue & très-indirecte; celle de l'art. 37 ci-dessus, est tirée des vrais principes de la chose, & ne laisse, ce me semble, rien à désirer. Cette méthode nous met aussi en état d'apprécier celle du chap. VII, & de reconnoître les inconvéniens où l'on pourroit tomber, si on la suivoit sans aucune précaution; c'est ce que nous allons discuter.

86. De ce que nous avons démontré dans le §. II, il s'ensuit que les valeurs de p & q qui satisfont à l'équation $p^2 - Aq^2 = 1$, ne peuvent être que les termes de quelqu'une des fractions principales déduites de la fraction continue qui exprimeroit la valeur de \sqrt{A} ; de sorte que supposant cette fraction continue représentée ainsi,

$$\mu + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} + \frac{1}{\mu'''} + \&c.$$

on aura nécessairement

$$\frac{p}{q} = \mu + \frac{1}{\mu'} + \frac{1}{\mu''} + \&c. + \frac{1}{\mu^b},$$

μ^b étant un terme quelconque de la série infinie $\mu'', \mu''', \&c.$ dont le quantième p ne peut se déterminer qu'à *posteriori*.

Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres $\mu, \mu', \mu'', \&c.$ doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans l'art. 3 qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que

l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables; mais la méthode du problème I, (art. 23 & suiv.) exige absolument que les valeurs approchées $\mu, \mu', \mu'', \&c.$ soient toutes prises en défaut.

87. Maintenant, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à une fraction continue dont les termes sont $\mu, \mu', \mu'', \&c.$ μ^b , il est clair, par l'art. 4, que μ sera le quotient de p divisé par q , que μ' sera celui de q divisé par le reste, μ'' celui de ce reste divisé par le second reste, &c. ainsi de suite; de sorte que nommant $r, f, t \&c.$ les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division, $p = \mu q + r$, $q = \mu' r + f$, $r = \mu'' f + t$, &c. où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, & l'avant-dernier $= 1$, à cause que p & q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi μ sera la valeur entière approchée de $\frac{p}{q}$, μ' celle de $\frac{q}{r}$, μ'' celle de $\frac{r}{f}$ &c. ces valeurs étant toutes prises moindres que les véritables, à l'exception de la dernière μ^b , qui sera exactement égale à la fraction corres-

pondante, à cause que le reste suivant est supposé nul.

Or comme les nombres μ , μ' , μ'' &c. μ'' sont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $\frac{p}{q}$, & pour celle qui exprime la valeur de \sqrt{A} , on peut prendre, jusqu'au terme μ' , $\frac{p}{q} = \sqrt{A}$, c'est-à-dire $p^2 - Aq^2 = 0$. Ainsi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire de \sqrt{A} , & ce sera la valeur de μ ; ensuite on substituera dans $p^2 - Aq^2 = 0$, à la place de p la valeur $\mu q + r$, ce qui donnera $(\mu^2 - A)q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0$, & on cherchera de nouveau la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire de la racine positive de l'équation

$$(\mu^2 - A)\left(\frac{r}{q}\right)^2 + 2\mu\frac{r}{q} + 1 = 0,$$

& l'on aura la valeur de μ' .

On continuera à substituer dans la transformée $(\mu^2 - A)q^2 + 2\mu qr + r^2 = 0$, à la place de q , $\mu' r + f$; on aura une équation dont la racine sera $\frac{p}{q}$; on prendra la valeur approchée en défaut de cette racine, & l'on

aura la valeur de μ'' . On substituera $\mu'' r + f$ à la place de r , &c.

Supposons maintenant que t soit, par ex. le dernier reste qui doit être nul, f sera l'avant-dernier qui doit être $= 1$; donc si la transformée en f & t de la formule $p^2 - Aq^2$ est $Pf^2 + Qft + Rt^2$, il faudra qu'en y faisant $t = 0$ & $f = 1$ elle devienne $= 1$, pour que l'équation proposée $p^2 - Aq^2 = 1$ ait lieu; donc P devra être $= 1$. Ainsi il n'y aura qu'à continuer les opérations & les transformations ci-dessus, jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité; alors on fera dans cette formule la première des deux indéterminées, comme r , égale à 1, & la seconde, comme f , égale à zéro; & en remontant on aura les valeurs convenables de p & q .

On pourroit aussi opérer sur l'équation même $p^2 - Aq^2 = 1$, en ayant seulement soin de faire abstraction du terme tout connu 1, & par conséquent aussi des autres termes tout connus qui peuvent résulter de celui-ci,

dans la détermination des valeurs approchées μ, μ', μ'' &c. de $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \frac{t}{u}$ &c. dans ce cas on essayera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $=1$ & l'autre $=0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, & il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p & de q .

Nous voilà donc conduits à la méthode du chapitre VII. A examiner cette méthode en elle-même & indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paroître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de μ, μ', μ'' &c. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque manière qu'on prenne ces valeurs, celles de r, s, t &c. doivent aller également en diminuant jusqu'à zéro, (art. 6).

Aussi M. Wallis remarque-t-il expressément qu'on peut employer à volonté les limites en plus ou en moins pour les nombres

μ, μ', μ'' &c. & il propose même ce moyen comme propre à abrégé souvent le calcul; c'est aussi ce que M. Euler fait observer dans l'art. 102 & suiv. du chap. cité; cependant je vais faire voir par un exemple, qu'en s'y prenant de cette manière on peut risquer de ne jamais parvenir à la solution de l'équation proposée.

Prenons l'exemple de l'art. 101 du même chap. où il s'agit de résoudre une équation de cette forme, $p^2 = 6q^2 + 1$, ou bien $p^2 - 6q^2 = 1$. On aura donc $p = \sqrt{6q^2 + 1}$, & négligeant le terme constant 1, $p = q\sqrt{6}$; donc $\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2 < 3$; prenons la limite en moins & faisons $\mu = 2$, & ensuite $p = 2q + r$; substituant donc cette valeur, on aura $-2q^2 + 4qr + r^2 = 1$; donc $q = \frac{2r + \sqrt{(6r^2 - 2)}}{2}$, ou bien, en rejetant le terme constant -2 , $q = \frac{2r + \sqrt{6}}{2}$; d'où $\frac{p}{q} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} > 2 < 3$; prenons de nouveau la limite en moins, & faisons $q = 2r + s$, la dernière équation deviendra $-4r^2 - 2s^2 = 1$, où l'on voit d'abord

qu'on peut supposer $f=0$ & $r=1$; ainsi on aura $q=2$, $p=5$.

Maintenant reprenons la premiere transformée $-2q^2+4qr+r=1$, où nous avons vu que $\frac{r}{q} > 2$ & < 3 , & au lieu de prendre la limite en *moins*, prenons-la en *plus*, c'est-à-dire, supposons $q=3r+f$, ou bien, puisque f doit être alors une quantité négative, $q=3r-f$, on aura la transformée suivante, $-5r^2+8rf-2f^2=1$, laquelle donnera $r=\frac{4f+\sqrt{(6f^2-5)}}{5}$;

donc négligeant le terme constant f , $r=\frac{4\sqrt{f^2-5}}{5}$; & $\frac{r}{f}=\frac{4+\sqrt{6}}{5} > 1 < 2$.

Prenons de nouveau la limite en *plus*, & faisons $r=2f-t$, on aura $-6f^2+12ft-5t^2=1$; donc $f=\frac{6t+\sqrt{(6t^2-6)}}{6}$; donc, rejetant le terme -6 , $f=\frac{6t+\sqrt{6}}{6}$, & $\frac{f}{t}=1+\frac{\sqrt{6}}{6} > 1 < 2$.

Qu'on continue à prendre les limites en *plus* & qu'on fasse $f=2t-u$, il viendra $-5t^2+12tu-6u^2=1$; donc $t=\frac{6u+\sqrt{(6u^2-5)}}{5}$;

donc $\frac{t}{u}=\frac{6+\sqrt{6}}{5} > 1 < 2$. Faisons donc de même $t=2u-x$, on aura $-12u^2+8ux-5x^2=1$; donc &c.

Continuant de cette maniere à prendre toujours les limites en *plus*, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puisse trouver une solution de la proposée.

La même chose arrivera nécessairement toutes les fois qu'on prendra la premiere limite en *moins*, & les suivantes routes en *plus*; je pourrais en donner la raison *a priori*; mais comme le Lecteur peut la trouver aisément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à présent il me suffit d'avoir montré la nécessité de traiter ces sortes de problèmes d'une maniere plus rigoureuse & plus profonde qu'on ne l'avoit encore fait.



PARAGRAPHE IX.

De la maniere de trouver des Fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées ensemble produisent toujours des fonctions semblables.

Addition pour les Chapitres XI & XII.

88. JE crois avoir été en même temps que M. Euler l'idée de faire servir les facteurs irrationnels & même imaginaires des formules du second degré, à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puissances quelconques; j'ai lu sur ce sujet à l'Académie en 1768, un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes recherches sur les Problèmes indéterminés, qui se trouvent dans le volume pour l'année 1767, lequel a paru en 1769, avant même la traduction Allemande de l'Algebre de M. Euler.

J'ai fait voir dans l'endroit que je viens

de citer, comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le second; & j'ai par ce moyen donné la solution de quelques équations dont il auroit peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliser encore davantage cette méthode, qui me paroît mériter particulièrement l'attention des Géomètres par sa nouveauté & par sa singularité.

89. Soient α & β les deux racines de l'équation du second degré

$$f^2 - af + b = 0,$$

& considérons le produit de ces deux facteurs

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

qui sera nécessairement réel; ce produit fera $x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2$; or on a $\alpha + \beta = a$, & $\alpha\beta = b$, par la nature de l'équation $f^2 - af + b = 0$; donc on aura cette formule du second degré

$$x^2 + axy + by^2,$$

laquelle est composée des deux facteurs

$$x + \alpha y \text{ \& } x + \beta y.$$

Maintenant il est visible que si l'on a une formule semblable

$$x^2 + ax'y' + by'^2,$$

& qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il suffira de multiplier ensemble les deux facteurs $x + ay$, $x' + ay'$, & les deux $x + \beta y$, $x' + \beta y'$, ensuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x + ay$ par $x' + ay'$ est $xx' + a(xy' + yx') + a^2yy'$; mais puisque a est une des racines de l'équation $f^2 - af + b = 0$, on aura $a^2 - a = -b = 0$; donc $a^2 = a - b$; donc substituant cette valeur de a^2 dans la formule précédente, elle deviendra $xx' - byy' + a(xy' + yx' + ayy')$; de sorte qu'en faisant, pour plus de simplicité,

$$X = xx' - byy',$$

$$Y = xy' + yx' + ayy',$$

le produit des deux facteurs $x + ay$, $x' + ay'$, fera $X + aY$, & par conséquent de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $x + \beta y$ & $x' + \beta y'$, fera $X + \beta Y$;

de sorte que le produit total sera $(X + aY)(X + \beta Y)$, savoir

$$X^2 + aXY + bY^2.$$

C'est le produit des deux formules semblables,

$$x^2 + axy + by^2, \text{ \& } x'^2 + ax'y' + by'^2.$$

Si on vouloit avoir le produit de ces trois formules semblables

$$x^2 + axy + by^2,$$

$$x'^2 + ax'y' + by'^2,$$

$$x''^2 + ax''y'' + by''^2,$$

il n'y auroit qu'à trouver celui de la formule $X^2 + aXY + bY^2$ par la dernière $x''^2 + ax''y'' + by''^2$, & il est visible, par les formules ci-dessus, qu'en faisant

$$X' = Xx'' - bYy'',$$

$$Y' = Xy'' + Yx'' + aYy'',$$

le produit cherché seroit

$$X'^2 + aX'Y' + bY'^2.$$

On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci,

$$x^3 + axy + by^3,$$

& ces produits seront toujours aussi de la même forme.

90. Si on fait $x = x$ & $y = y$, on aura

$$X = x^3 - by^3, Y = 3xy + ay^3,$$

& par conséquent

$$(x^3 + axy + by^3)^3 = X^3 + aXY + bY^3.$$

Donc, si l'on veut trouver des valeurs rationnelles de X & Y , telles que la formule $X^3 + aXY + bY^3$ devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X & à Y les valeurs précédentes, & l'on aura pour la racine du carré la formule $x^3 + axy + by^3$, x & y étant deux indéterminées.

Si on fait de plus $x'' = x - by^3$ & $y'' = y$, on aura $X' = Xx - bYy$, $Y' = Xy + Yx + aYy$, c'est-à-dire en substituant les valeurs précédentes de X & Y ,

$$X' = x^3 - 3bxy^3 + aby^3,$$

$$Y' = 3x'y + 3axy^3 + (a^2 - b)y^3;$$

donc

$$(x^3 + axy + by^3)^3 = X^3 + aXY + bY^3.$$

Ainsi, si l'on proposoit de trouver des valeurs

valeurs rationnelles de X & Y ; telles que la formule $X^3 + aXY + bY^3$ devint un cube, il n'y auroit qu'à donner à X & Y les valeurs précédentes, moyennant quoi on auroit un cube dont la racine seroit $x^3 + axy + by^3$, x & y étant deux indéterminées.

On pourroit résoudre d'une manière semblable les questions où il s'agiroit de produire des puissances quatrièmes, cinquièmes &c. mais on peut aussi trouver immédiatement des formules générales pour une puissance quelconque m , sans passer par les puissances inférieures.

Soit donc proposé de trouver des valeurs rationnelles de X & Y , telles que la formule $X^3 + aXY + bY^3$ devienne une puissance m , c'est-à-dire qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$X^3 + aXY + bY^3 = Z^m.$$

Comme la quantité $X^3 + aXY + bY^3$ est formée du produit des deux facteurs $X + aY$ & $X + bY$, il faudra, pour que cette quan-

tité devienne une puissance du degré m , que chacun de ses deux facteurs devienne aussi une semblable puissance.

Faisons donc d'abord

$$X + {}^a Y = (x + {}^a y)^m;$$

& développant cette puissance par le théorème de *Newton*, on aura

$$x^m + m \lambda^{m-1} y^1 x + \frac{m(m-1)}{2} \lambda^{m-2} y^2 x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \lambda^{m-3} y^3 x^3 + \text{\&c.}$$

Or, puisque a est une des racines de l'équation $f^3 - af + b = 0$, on aura aussi $a^3 - aa + b = 0$; donc $a^3 = aa - b$, $a^4 = aa^2 - ba = (a - b)a - ab$, $a^5 = (a - b)a^2 - ab^2 = (a^2 - 2ab)a - a^2b + b^2$, & ainsi de suite. Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans la formule précédente, & elle se trouvera par-là composée de deux parties, l'une toute rationnelle qu'on comparera à X , & l'autre toute multipliée par la racine a , qu'on comparera à ${}^a Y$.

Si on fait pour plus de simplicité

$$\begin{array}{ll} A' = 1 & B' = 0 \\ A'' = a & B'' = b \end{array}$$

$$\begin{aligned} A''' &= aA' - bA' & B''' &= aB' - bB' \\ A^{(4)} &= aA'' - bA'' & B^{(4)} &= aB'' - bB'' \\ A^{(5)} &= aA''' - bA''' & B^{(5)} &= aB''' - bB''' \\ & \text{\&c.} & \text{\&c.} & \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} a &= A' a - B' \\ a^2 &= A'' a - B'' \\ a^3 &= A''' a - B''' \\ a^4 &= A^{(4)} a - B^{(4)}, \text{\&c.} \end{aligned}$$

Donc substituant ces valeurs, & comparant, on aura

$$\begin{aligned} X &= x^m - m x^{m-1} y^1 B' - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 B'' \\ & \quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} x^{m-3} y^3 B''' - \text{\&c.} \\ Y &= m x^{m-1} y^1 A' + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 A'' \\ & \quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} x^{m-3} y^3 A''' + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Or, comme la racine a n'entre point dans les expressions de X & Y , il est clair qu'ayant $X + {}^a Y = (x + {}^a y)^m$, on aura aussi $X + {}^b Y = (x + {}^b y)^m$; donc multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

& par conséquent

$$Z = x^3 + axy + by^2.$$

Ainsi le probleme est résolu.

Si a étoit ∞ , les formules précédentes deviendroient beaucoup plus simples; car on auroit $A' = 1$, $A'' = 0$, $A''' = -b$, $A^{(4)} = 0$, $A^{(5)} = b^2$, $A^{(6)} = 0$, $A^{(7)} = -b^3$ &c. &c. de même $B' = 0$, $B'' = b$, $B^{(3)} = 0$, $B^{(4)} = -b^2$, $B^{(5)} = 0$, $B^{(6)} = b^3$ &c. &c.

donc

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 b^2 - \&c.$$

$$Y = mx^{m-1}y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3}y^3b + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{m-5}y^5b^2 - \&c.$$

&c ces valeurs satisfont à l'équation

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m.$$

91. Passons maintenant aux formules de trois dimensions; pour cela nous désignons par α , β , γ les trois racines de l'équation du troisième degré,

$$f^3 - af^2 + bf - c = 0,$$

&c nous considérerons ensuite le produit de ces trois facteurs,

$$(z + \alpha y + \alpha^2 x)(z + \beta y + \beta^2 x)(z + \gamma y + \gamma^2 x),$$

lequel sera nécessairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit suivant,

$$\begin{aligned} & x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2y + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2z + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)xy^2 \\ & + (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta)xy\gamma + (\alpha^3\beta^2 \\ & + \alpha^2\gamma^3 + \beta^3\gamma^2)x^2z + (\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta)\gamma^2z \\ & + (\alpha^3\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^3\gamma^2\alpha)\gamma\gamma^2 + \alpha^3\beta^2\gamma^2z^3; \end{aligned}$$

or par la nature de l'équation on a

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \alpha\beta\gamma = c;$$

de plus on trouvera

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = a^2 - 2b, \\ \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = ab - 3c, \\ \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\gamma^3 + \beta^3\gamma^2 &= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = b^2 - 2ac, \\ \alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta &= (\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = ac, \\ \alpha^3\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^3\gamma^2\alpha &= (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\alpha\beta\gamma = bc; \end{aligned}$$

donc faisant ces substitutions, le produit dont il s'agit sera

$$\begin{aligned} & x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xy\gamma \\ & + (b^2 - 2ac)x\gamma^2 + cy^3 + ac\gamma^2z + bcy\gamma^2 + c^2z^3. \end{aligned}$$

Et cette formule aura la propriété, que si on multiplie ensemble autant de semblables formules que l'on veut, le produit sera toujours aussi une formule semblable.

Ss iij

$$x'' + ax''y'' + (a-2b)x''z'' + bx''y'' + (ab - 3c)x''y''z'' + (b^2 - 2ac)x''z'' + cy'' + acy''z'' + bcy''z'' + c^2z'',$$

& qu'on voudrait avoir le produit de cette formule & des deux précédentes, il est clair qu'il n'y auroit qu'à faire

$$X' = Xx'' - c(Yz'' + Zy'') + acZz'', \\ Y' = Xy'' + Yx'' - b(Yz'' + Zy'') - (ab - c)Zz'', \\ Z' = Xz'' + Zx'' + Yy'' + a(Yz'' + Zy'') + (a^2 - b)Zz'',$$

& l'on auroit pour le produit cherché

$$X' + aX'Y' + (a^2 - 2b)X'Z' + bX'Y'Z' + (ab - 3c)X'Y'Z' + (b^2 - 2ac)X'Z' + cY' + acY'Z' + bcy'Z' + c^2Z',$$

92. Faisons maintenant $x'' = x$, $y'' = y$,

$z'' = z$, nous aurons

$$X = x'' - 2cyz + acz^2,$$

$$Y = 2xy - 2byz - (ab - c)z^2,$$

$$Z = 2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2,$$

& ces valeurs satisferont à l'équation

$$X' + aX'Y' + bXY' + cY' + (a^2 - 2b)X'Z' + (ab - 3c)XYZ + acY'Z' + (b^2 - 2ac)XZ' + bcyZ' + c^2Z' = V^2,$$

en prenant

$$V = x' + ax'y + bxy^2 + cy^3 + (a^2 - 2b)x^2z \\ + (ab - 3c)xyz + acy^2z + (b^2 - 2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3;$$

donc si l'on avoit, par exemple, à résoudre une équation de cette forme,

$$X' + aX'Y' + bXY' + cY' = V^2,$$

a , b , c étant des quantités quelconques données, il n'y auroit qu'à rendre $Z = 0$, en faisant

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2}{2z},$$

& substituant cette valeur de x dans les expressions précédentes de X , Y & V , on aura des valeurs très-générales de ces quantités, qui satisferont à l'équation proposée.

Cette solution mérite d'être bien remarquée à cause de sa généralité & de la manière dont nous y sommes parvenus, qui est peut-être l'unique qui puisse y conduire facilement.

On auroit de même la résolution de l'équation

$$\begin{aligned} X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)X^2Z + bXY^2 + (ab \\ - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2 + cY^3 \\ + acYZ^2 + bcY^2Z + c^2Z^3 = V^3, \end{aligned}$$

en faisant dans les formules ci-dessus

$$x' = x' = x, y' = y' = y, z' = z' = z,$$

& prenant

$$\begin{aligned} V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab \\ - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 + acy^2z \\ + bcyz^2 + c^2z^3. \end{aligned}$$

Et on pourroit résoudre aussi successive-
ment les cas où, au lieu de la troisième
puissance V^3 , on auroit V^4 , V^5 &c. mais
nous allons traiter ces questions d'une ma-
nière tout-à-fait générale, comme nous
l'avons fait dans l'art. 90 ci-dessus.

93. Soit donc proposé de résoudre une
équation de cette forme,

$$\begin{aligned} X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)X^2Z + bXY^2 + (ab \\ - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2 + cY^3 + acY^2Z \\ + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^m. \end{aligned}$$

Puisque la quantité qui forme le premier

membre de cette équation n'est autre chose
que le produit de ces trois facteurs,
 $(X + aY + a^2Z)(X + bY + b^2Z)(X + cY + c^2Z)$,
il est clair que pour rendre cette quantité
égale à une puissance du degré m , il ne
faudra que rendre chacun de ses facteurs
en particulier égal à une pareille puissance.
Soit donc

$$X + aY + a^2Z = (x + ay + a^2z)^m,$$

on commencera par développer la puis-
sance m de $x + ay + a^2z$ par le théorème
de *Newton*, ce qui donnera

$$\begin{aligned} x^m + mx^{m-1}(y + az) + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y + az)^2 \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3}(y + az)^3 + a^2, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

ou bien, en formant les différentes puis-
sances de $y + az$, & ordonnant ensuite,
par rapport aux dimensions de a ,

$$\begin{aligned} x^m + mAx^{m-1}yu + (mx^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2)a^2 \\ + (m(m-1)x^{m-2}yz + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}x^{m-3}y^3)a^3 \\ + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Mais comme dans cette formule on ne
voit pas aisément la loi des termes, nous
supposerons en général

$$(x+ay+a^2z)^m = P + P^1a + P^2a^2 + P^3a^3 \\ + P^4a^4 + \&c.$$

& l'on trouvera

$$P = x^m,$$

$$P^1 = \frac{myP}{x},$$

$$P^2 = \frac{(m-1)yP^1 + 2m\gamma P}{2x},$$

$$P^3 = \frac{(m-2)\gamma P^1 + (2m-1)\gamma P^2}{3x},$$

$$P^4 = \frac{(m-3)\gamma P^2 + (2m-2)\gamma P^3}{4x} \&c.$$

c'est ce qui se démontre facilement par le calcul différentiel.

Maintenant on aura, à cause que a est une des racines de l'équation $f^2 - af^2 + bf - c = 0$, on aura, dis-je, $a^2 - aa^2 + ba - c = 0$; d'où

$$a^2 = aa^2 - ba + c; \text{ donc}$$

$$a^4 = aa^3 - ba^3 + ca^3 = (a^2 - b)a^3 + ca^3 = (a^2 - b)a^3 + ac^2 - ab^2 + ac,$$

$$a^4 = (a^2 - b)a^3 - (ab - c)a^2 + ac^2 = (a^2 - 2ab + c)a^2 - (a^2b - b^2 - ac)a + (a^2 - b)c,$$

&c ainsi de suite.

De sorte que si on fait pour plus de simplicité

$$A^1 = 0$$

$$A^2 = 1$$

$$A^3 = a$$

$$A^4 = aA^3 - bA^2 + cA^1$$

$$A^5 = aA^4 - bA^3 + cA^2$$

$$A^6 = aA^5 - bA^4 + cA^3, \&c.$$

$$B^1 = 1$$

$$B^2 = 0$$

$$B^3 = b$$

$$B^4 = aB^3 - bB^2 + cB^1$$

$$B^5 = aB^4 - bB^3 + cB^2$$

$$B^6 = aB^5 - bB^4 + cB^3, \&c.$$

$$C^1 = 0$$

$$C^2 = 0$$

$$C^3 = c$$

$$C^4 = aC^3 - bC^2 + cC^1$$

$$C^5 = aC^4 - bC^3 + cC^2$$

$$C^6 = aC^5 - bC^4 + cC^3, \&c.$$

on aura

$$a^2 = A^1a^2 - B^1a + C^1$$

$$a^3 = A^2a^2 - B^2a + C^2$$

$$a^4 = A^3a^2 - B^3a + C^3$$

$$a^5 = A^4a^2 - B^4a + C^4, \&c.$$

Substituant donc ces valeurs dans l'expression de $(x + ay + a^2z)^m$, elle se trouvera composée de trois parties, l'une toute rationnelle, l'autre toute multipliée par a , & la troisième toute multipliée par a^2 , ainsi il n'y aura qu'à comparer la première à X , la seconde à aY , & la troisième à a^2Z , & l'on aura par ce moyen

$$\begin{aligned} X &= P + P' C + P'' C^2 + P''' C^3 + P^{IV} C^4 \&c. \\ Y &= P' B + P'' B^2 + P''' B^3 + P^{IV} B^4 \&c. \\ Z &= P' A + P'' A^2 + P''' A^3 + P^{IV} A^4 \&c. \end{aligned}$$

Ces valeurs satisferont donc à l'équation $X + aY + a^2Z = (x + ay + a^2z)^m$; & comme la racine a n'entre point en particulier dans les expressions de X , Y & Z , il est clair qu'on pourra changer a en β , ou en γ ; de sorte qu'on aura également $X + \beta Y + \beta^2 Z = (x + \beta y + \beta^2 z)^m$, &c.

$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m.$$

Or multipliant ensemble ces trois équations, il est visible que le premier membre fera le même que celui de l'équation proposée, & que le second sera égal à une

puissance m , dont la racine étant nommée V , on aura

$$\begin{aligned} V &= x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 \\ &\quad + (ab - 3c)xy^2z + (b^2 - 2ac)xz^2 + cy^3 \\ &\quad + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3. \end{aligned}$$

Ainsi on aura les valeurs demandées de X , Y , Z & V , lesquelles renfermeront trois indéterminées x , y , z .

94. Si on vouloit trouver des formules de quatre dimensions qui eussent les mêmes propriétés que celles que nous venons d'examiner, il faudroit considérer le produit de quatre facteurs de cette forme,

$$x + ay + a^2z + a^3t$$

$$x + \beta y + \beta^2z + \beta^3t$$

$$x + \gamma y + \gamma^2z + \gamma^3t$$

$$x + \delta y + \delta^2z + \delta^3t,$$

en supposant que a , β , γ , δ fussent les racines d'une équation du quatrième degré, telle que celle-ci,

$$f^4 - af^3 + bf^2 - cf + d = 0;$$

on aura ainsi

$$a + \beta + \gamma + \delta = a,$$

$$a\beta + a\gamma + a\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b,$$

$$a\beta\gamma + a\beta\delta + a\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c,$$

$$a\beta\gamma\delta = d,$$

moyennant quoi on pourra déterminer tous les coefficients des différens termes du produit dont il s'agit, sans connoître les racines a, β, γ, δ en particulier. Mais comme il faudra faire pour cela différentes réductions qui peuvent ne pas se présenter facilement, on pourra s'y prendre, si on le juge plus commode, de la maniere que voici.

Qu'on suppose en général

$$x + fy + f^2z + f^3t = p;$$

& comme f est déterminé par l'équation

$$f^4 - af^3 + bf^2 - cf + d = 0,$$

qu'on chasse f de ces deux équations par les regles connues, & l'équation résultante de l'évanouissement de f étant ordonnée par rapport à l'inconnue p , montera au quatrième degré; de sorte qu'elle pourra se mettre sous cette forme,

$$p^4 - Np^3 + Pp^2 - Qp + R = 0.$$

Or

Or cette équation en p ne monte au quatrième degré que parce que f peut avoir les quatre valeurs a, β, γ, δ , & qu'ainsi p peut avoir aussi ces quatre valeurs correspondantes,

$$x + ay + a^2z + a^3t$$

$$x + \beta y + \beta^2z + \beta^3t$$

$$x + \gamma y + \gamma^2z + \gamma^3t$$

$$x + \delta y + \delta^2z + \delta^3t,$$

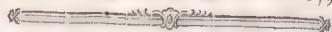
lesquelles ne sont autre chose que les facteurs dont il s'agit d'avoir le produit. Donc, puisque le dernier terme R doit être le produit de toutes les quatre racines, ou valeurs de p , il s'ensuit que cette quantité R fera le produit demandé.

Mais en voilà assez sur ce sujet, que nous pourrions peut-être reprendre dans une autre occasion.

Je terminerai ici ces Additions, que les bornes que je me suis prescrites ne me permettent pas d'étendre plus loin; peut-être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les objets que j'y ai traités étant d'un

genre assez nouveau & peu connu; j'ai cru devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au fait des méthodes que j'ai exposées, & de leurs différens usages.

F I N.



*T A B L E
DES MATIERES*

*C O N T E N U E S
DANS LA SECONDE PARTIE.*

*D E L'ANALYSE
INDÉTERMINÉE.*

- CHAP. I. *DE la résolution des équations
du premier degré, qui renferment
plus d'une inconnue, p. 1*
- II. *De la règle qu'on nomme regula
coeci, où il s'agit de déterminer,
par deux équations, trois
ou un plus grand nombre d'in-
connues, 30*
- III. *Des équations indéterminées com-
posées, dans lesquelles l'une des
inconnues ne passe pas le pre-
mier degré, 42*

T t ij

- CH. IV. De la maniere de rendre rationnelles les quantités sourdes de la forme $\sqrt{a+bx+cx^2}$, p. 50
- V. Des cas où la formule $a+bx+cx^2$ ne peut jamais devenir un carré, 77
- VI. Des cas en nombres entiers, où la formule $axx+b$ devient un carré, 96
- VII. D'une méthode particulière, par laquelle la formule $am+1$ devient un carré en nombres entiers, 116
- VIII. De la maniere de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3}$, 135
- IX. De la maniere de rendre rationnelle la formule incommensurable $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$, 153
- X. De la méthode de rendre rationnelle la formule irrationnelle $\sqrt[3]{a+bx+cx^2+dx^3}$, 177

- CH. XI. De la résolution de la formule $axx+bxy+cy^2$ en ses facteurs, pag. 195
- XII. De la transformation de la formule $axx+cy^2$ en des carrés & en des puissances plus élevées, 219
- XIII. De quelques expressions de la forme ax^4+by^4 , qui ne sont pas réduçibles à des carrés, 242
- XIV. Solutions de quelques questions qui appartiennent à cette partie de l'analyse, 263
- XV. Solutions de quelques questions où l'on demande des cubes, 339





T A B L E
DES MATIERES
CONTENUES DANS LES ADDITIONS.

- A**VERTISSEMENT, pag. 371
- §. I. Sur les fractions continues, 379
- §. II. Solutions de quelques problèmes curieux & nouveaux d'Arithmétique, 445
- §. III. Sur la résolution des équations du premier degré à deux inconnues en nombres entiers, 517
- §. IV. Méthode générale pour résoudre en nombres entiers les équations à deux inconnues, dont l'une ne passe pas le premier degré, 527
- §. V. Méthode directe & générale pour résoudre les équations du second degré à deux inconnues, en nombres rationnels, 534

- Résolution de l'équation $Ap^2 + Bq^2 = z^2$ en nombres entiers, pag. 538
- §. VI. Sur les doubles & triples égalités, 556
- §. VII. Méthode directe & générale pour résoudre en nombres entiers les équations du second degré à deux inconnues, 561
- Résolution de l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ en nombres entiers.
Première méthode, 568
Seconde méthode, 572
- De la manière de trouver toutes les solutions possibles de l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, lorsqu'on en connoît une seule, 583
- De la manière de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers des équations du second degré à deux inconnues, 595
- §. VIII. Remarques sur les équations de la forme $p^2 = Aq^2 + 1$, & sur la manière ordinaire de les résoudre en nombres entiers, 624

- S. IX. *De la maniere de trouver des fonctions algébriques de tous les degrés, qui étant multipliées ensemble produisent toujours des fonctions semblables,* pag. 636



APPROBATION.

J'AI lu par ordre de Monseigneur le Chancelier la Traduction Française des *Elémens d'Algebre* de M. Euler; les moindres ouvrages des grands hommes sont toujours précieux, les Additions que M. de la Grange a faites à celui-ci le rendent plus précieux encore. A Paris, le 17 Août 1771.

M A R I E.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & fœux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillis, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre amé le Sieur J. M. BRUYSET, Libraire à Lyon, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des *Elémens d'Algebre* par M. Euler, traduits de l'Allemand & enrichis de notes par M. Bernoulli, avec un traité d'Analyse indéterminée par M. de la Grange; s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilège pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre &

débiter par tout notre Royaume pendant le temps de six années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. FAISONS DÉTENDRE à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts; A LA CHARGE que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en beau papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance du présent Privilege; qu'avant de l'exposer en vente, le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, es mains de notre trésorier & féal Chevalier Chancelier Garde des Sceaux de France, le Sieur DE MAUPEOU; qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur DE MAUPEOU; le tout à peine de nullité des Présentes: DU CONTENU desquelles, vous mandons

& enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour dûment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le douzième jour du mois de Septembre, l'an de grace mil sept cent soixante & onze, & de notre Regne le cinquante-septième.

PAR LE ROI EN SON CONSEIL.

Signé LEBEGUE.

Registré sur le Registre XVIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N^o. 1638, fol. 530, conformément au Règlement de 1723. A Paris, ce 17 Septembre 1771.

Signé, J. HERISSANT, Syndic.

1. Die erste Gruppe ist die Gruppe der "Kriegsgefangenen". Diese Gruppe ist die größte Gruppe und besteht aus denjenigen, die während des Krieges in deutsche Kriegsgefangenenlager interniert wurden. Diese Gruppe ist in drei Untergruppen unterteilt: die Gruppe der "Kriegsgefangenen", die Gruppe der "Kriegsgefangenen" und die Gruppe der "Kriegsgefangenen".



